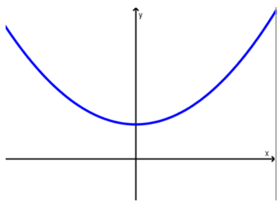
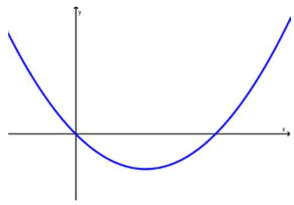
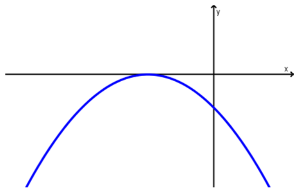
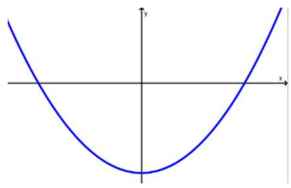
1. Scrivi l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y tale che:
   A. l'ascissa del vertice sia positiva
   B. abbia concavità rivolta verso il basso
   C. passi per l'origine

La parabola con asse parallelo all'asse y ha generica equazione: $y = ax^2 + bx + c$.

Perché la concavità della parabola sia rivolta verso il basso, il coefficiente $\boldsymbol{a}$ deve essere **negativo**, perché l'ascissa del vertice sia positiva, i coefficienti a e b devono essere discordi, perciò $\boldsymbol{b}$ sarà **positivo** e infine perché passi per l'origine il termine noto $\boldsymbol{c}$ deve essere **nullo**.

$$\boldsymbol{y = -x^2 + 3x}$$

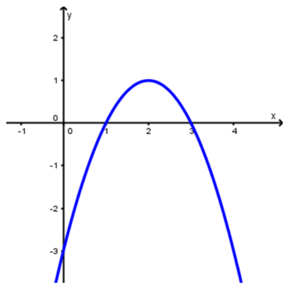
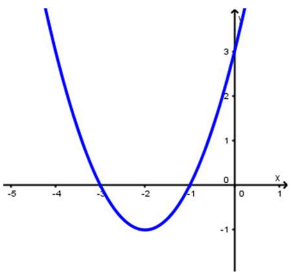
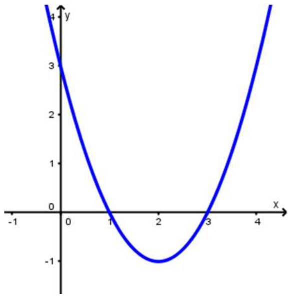
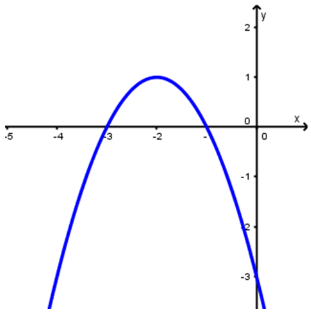
2. In ciascuna delle seguenti figure è disegnata, in un sistema di riferimento cartesiano, una parabola che ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Stabilisci, caso per caso, se i coefficienti a, b, c e il Δ del trinomio a secondo membro sono positivi, negativi o nulli:

$a > \mathbf{0}$	$a > \mathbf{0}$	$a < \mathbf{0}$	$a > \mathbf{0}$
$b = \mathbf{0}$	$b < \mathbf{0}$	$b < \mathbf{0}$	$b = \mathbf{0}$
$c > \mathbf{0}$	$c = \mathbf{0}$	$c < \mathbf{0}$	$c < \mathbf{0}$
$\Delta < \mathbf{0}$	$\Delta > \mathbf{0}$	$\Delta = \mathbf{0}$	$\Delta > \mathbf{0}$

3. Associa a ogni parabola la sua equazione scrivendo accanto al numero la lettera corrispondente:

a. $y - 1 = -(x-2)^2$ b. $y + 1 = (x-2)^2$ c. $y - 1 = -(x+2)^2$ d. $y + 1 = (x+2)^2$

1 $\boldsymbol{a}$ 2 $\boldsymbol{d}$ 3 $\boldsymbol{b}$ 4 $\boldsymbol{c}$

4. Determina per quali valori di k l'equazione

$$y = (3-k)\,x^2 + kx - 2$$

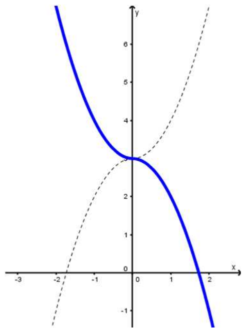
rappresenta una parabola con il vertice nel terzo quadrante.

Perché il vertice della parabola sia nel terzo quadrante, entrambe le coordinate devono essere negative, perciò:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} < 0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{k}{2(3-k)} < 0 \\ \dfrac{k^2+24-8k}{4\,(3-k)} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{3-k} > 0 \\ 3-k > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < k < 3 \\ k < 3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{0 < k < 3}$$

5. Rappresenta la funzione:

$$y = 3 - x\,|\,x\,|$$



$$y = \begin{cases} 3 - x^2 & se\ x \geq 0 \\ 3 + x^2 & se\ x < 0 \end{cases}$$

Le due parabole hanno in comune il vertice, di coordinate $V\ (0; 3)$.

6. Dopo aver definito la parabola come luogo geometrico, determina l'equazione della parabola di fuoco $F\ (-2;\ -1)$ e direttrice $y = -3$, applicando la definizione.

Assegnati nel piano un punto F e una retta d, si chiama **parabola** la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d.

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = |\,y+3\,| \qquad x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = y^2 + 6y + 9 \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{4}x^2 + x - 1}$$

7. Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la parabola $y = -kx^2 + x + k^2$ passa per il punto $P\ (1; 1)$?

Siccome la parabola passa per il punto dato, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della parabola ottengo un'identità:

$$1 = -k + 1 + k^2 \qquad k^2 - k = 0 \qquad k\ (k-1) = 0 \qquad \begin{matrix} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \end{matrix}$$

Il valore $k = 0$ non è accettabile, perché in tal caso non si tratterebbe di una parabola. L'unico valore accettabile è $\boldsymbol{k = 1}$.

8. Determina la parabola $y = x^2 + bx + c$ in modo che abbia fuoco nel punto $\left(2;\ -\frac{15}{4}\right)$.

Pongo le generiche coordinate del fuoco uguali alle coordinate date:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = -\dfrac{15}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{b}{2} = 2 \\ 1 - b^2 + 4c = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4 \\ 1 - 16 + 4c = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = x^2 - 4x}$$

9. Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 1$, determina il coefficiente angolare m delle rette passanti per $C\ (-1; 2)$ che hanno almeno un punto in comune con la parabola.

Le rette passanti per C hanno equazione: $y - 2 = m\ (x + 1)$
Metto a sistema l'equazione della parabola e quella del fascio di rette di centro C e pongo $\Delta \geq 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = 2 + mx + m \end{cases} \qquad x^2 + x\ (m-2) + m + 1 = 0 \qquad \Delta = (m-2)^2 - 4\ (m+1) \geq 0$$

$$m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 \geq 0 \qquad m^2 - 8m \geq 0 \qquad \boldsymbol{m \leq 0 \ \vee\ m \geq 8}$$

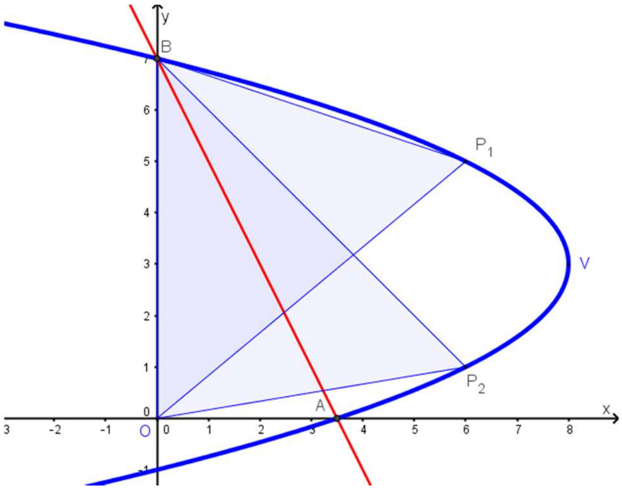
10. Determina le intersezioni A e B ($x_A > x_B$) della parabola di equazione $x = -\frac{1}{2}y^2 + 3y + \frac{7}{2}$ con la retta di equazione $2x + y - 7 = 0$ e trova un punto P sull'arco di parabola AB in modo che il triangolo OPB abbia area 21.

Metto a sistema l'equazione della parabola con quella della retta per determinare le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 + 3y + \frac{7}{2} \\ x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2} \end{cases} \qquad \frac{1}{2}y^2 - 3y - \frac{1}{2}y = 0$$

$$y^2 - 7y = 0 \qquad \begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 7 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{A\left(\frac{7}{2};0\right)} \qquad \boldsymbol{B\,(0;7)}$$



La base OB del triangolo ha lunghezza **7**, perciò, considerato che il triangolo OPB deve avere area 21, l'altezza misurerà **6**. Tale altezza corrisponde all'ascissa del generico punto P. Conoscendo l'ascissa, posso ricavare entrambe le coordinate:

$$6 = -\frac{1}{2}y^2 + 3y + \frac{7}{2} \qquad \frac{1}{2}y^2 - 3y + \frac{5}{2} = 0 \qquad y^2 - 6y + 5 = 0 \qquad \begin{matrix} y_1 = 5 \\ y_2 = 1 \end{matrix}$$

I due punti che hanno le caratteristiche richieste sono:

$$\boldsymbol{P_1\,(6;5)} \qquad \boldsymbol{P_2\,(6;1)}$$

11. Per quale valore di k la parabola di equazione $y = -x^2 + (k+3)\,x - k$ stacca un segmento di misura $3\sqrt{2}$ sulla retta di equazione $y = x - 1$?

Metto a sistema l'equazione della parabola con quella della retta e trovo le coordinate generiche dei due punti di intersezione. A questo punto, pongo la distanza tra i due punti uguale a quella assegnata:

$$\begin{cases} y = -x^2 + (k+3)\,x - k \\ y = x - 1 \end{cases} \qquad x^2 - x\,(k+2) + k - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{k + 2 \pm \sqrt{k^2 + 4k + k - 4k + 4}}{2} = \frac{k + 2 \pm \sqrt{k^2 + 8}}{2}$$

$$A\left(\frac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2};\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right) \qquad B\left(\frac{k+2-\sqrt{k^2+8}}{2};\frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{k+2+\sqrt{k^2+8}}{2} - \frac{k+2-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2} - \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{k^2+8}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{k^2+8} = 3\sqrt{2} \qquad k^2 + 8 = 9 \qquad \boldsymbol{k = \pm 1}$$

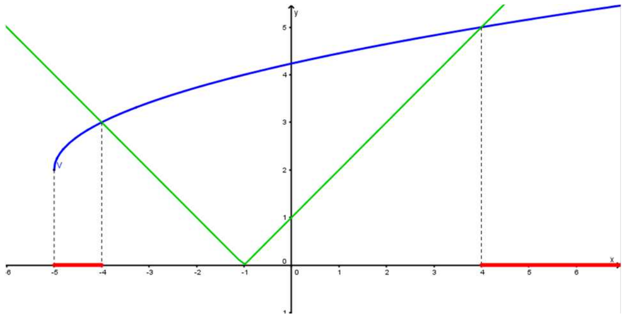
12. Risolvi graficamente la disequazione:

$$2+\sqrt{x+5}<|\,x+1|$$

Considero l'arco di parabola e la retta di equazione, rispettivamente:

$$y=2+\sqrt{x+5} \qquad\qquad y=|\,x+1\,|$$

$$\begin{cases} y-2\ge 0 \\ x+5\ge 0 \\ (y-2)^2=\left(\sqrt{x+5}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y\ge 2 \\ x\ge -5 \\ x=y^2-4y-1 \end{cases}$$



L'arco di parabola è dato dalla parabola di vertice $V\ (-5;2)$, con asse di simmetria parallelo all'asse x, con concavità rivolta nel verso positivo dell'asse x, ma ne considero solo la parte superiore.

Per quanto riguarda la retta, l'equazione è:

$$y=|x+1|=\begin{cases} x+1 & se\ x\ge -1 \\ -x-1 & se\ x<-1 \end{cases}$$

Dopo aver rappresentato anche la retta, determino i due punti di intersezione che hanno, rispettivamente, ascissa – 4 e 4. La soluzione è indicata in rosso nel disegno:

$$\boldsymbol{-5\le x<-4 \quad \vee \quad x>4}$$