1. Determina l'angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ tale che la sua tangente sia doppia del seno.

$$\tan\alpha = 2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

2. Dato l'angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determina le condizioni per il parametro, affinché siano verificate le seguenti uguaglianze:

$$(k-1)\tan\alpha = k^2 + 1 \qquad k\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

Per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha > 0$ e $0 < \cos\alpha < 1$, perciò:

$$\tan\alpha = \frac{k^2+1}{k-1}: \qquad \frac{k^2+1}{k-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k > 1}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3k}: \qquad 0 < -\frac{1}{3k} < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{3k} > 0 \\ -\frac{1}{3k} < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k < 0 \\ \frac{3k+1}{3k} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k < 0 \\ k < -\frac{1}{3} \ \vee \ k > 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{k < -\frac{1}{3}}$$

3. Calcola il valore delle rimanenti funzioni goniometriche, essendo dati:

$$\cos\alpha = -\frac{8}{17} \quad con \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \qquad\qquad \tan\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7} \quad con \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\cos\alpha = -\frac{8}{17} \qquad \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}} = \boldsymbol{-\frac{15}{17}} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boldsymbol{\frac{15}{8}} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \boldsymbol{\frac{8}{15}}$$

$$\tan\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad \tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \cos^2\alpha\tan^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{7}}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

4. Verifica che, se $\tan^2\alpha = 1 + 2\tan^2\beta$, si ha pure: $\cos^2\beta = 2\cos^2\alpha$.

$$\tan^2\alpha = 1 + 2\tan^2\beta \qquad \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{2\sin^2\beta}{\cos^2\beta} \qquad \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + 2\,\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 1 + \frac{2}{\cos^2\beta} - 2 \qquad \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\beta} \qquad \cos^2\beta = 2\cos^2\alpha$$

5. Calcola:

$$sin\left(arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \Rightarrow \quad tan\left(arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

6. Verifica che, per $-1 \le x \le 1$, è $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

So che $\arcsin x = \alpha$, con $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, perciò $\cos\alpha \ge 0$. Inoltre, essendo $\arcsin x = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \sin\alpha$, ottengo:

$$\cos(\arcsin x) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$$

7. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = arc\cos\frac{2x-3}{x+2} \qquad y = \sqrt{arc\sin(x-1)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+2} \geq -1 \\ \dfrac{2x-3}{x+2} \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+2} \geq 0 \\ \dfrac{x-5}{x+2} \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -2 \quad \vee \quad x \geq \dfrac{1}{3} \\ -2 < x \leq 5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{3} \leq x \leq 5}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ arc\sin(x-1) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ 0 \leq x-1 \leq 1 \end{cases} \qquad 0 \leq x-1 \leq 1 \qquad \boldsymbol{1 \leq x \leq 2}$$

8. Sapendo che $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calcola:

$$\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} \qquad \cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = \cos\left(\pi - \frac{2}{5}\pi\right) = -\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{9}{10}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{1}{10}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} \qquad \cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right) = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{3}{5}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$$

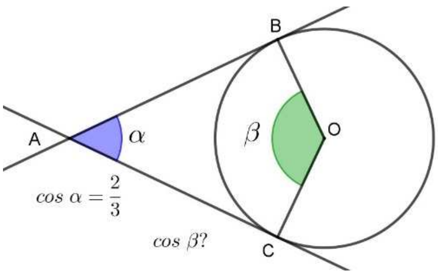
9. Calcola: $arc\sin x + arc\cos x$.

Pongo $arc\sin x = y$, perciò $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, quindi:

$$arc\sin x + arc\cos x = arc\sin(\sin y) + arc\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = y + \frac{\pi}{2} - y = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

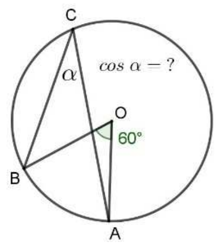
10. Data la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio r, determina le funzioni goniometriche richieste:

Le tangenti AB e AC sono perpendicolari ai raggi tracciati per i punti di tangenza, perciò, rispettivamente, a OB e OC. Il quadrilatero ACOB, la cui somma degli angoli interni è 360°, ha due angoli retti, perciò gli angoli α e β sono supplementari, quindi:



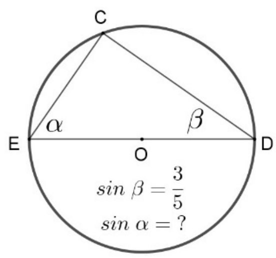
$$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

Gli angoli $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$ sono, rispettivamente, angolo al centro e angolo alla circonferenza sottesi dallo stesso arco AB, perciò:



$$A\hat{O}B \cong 2\,A\hat{C}B \quad \Rightarrow \quad A\hat{C}B = \alpha = 30° \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Il triangolo EDC, avendo un lato coincidente con il diametro, è un triangolo rettangolo in C, perciò gli angoli α e β sono complementari, quindi:

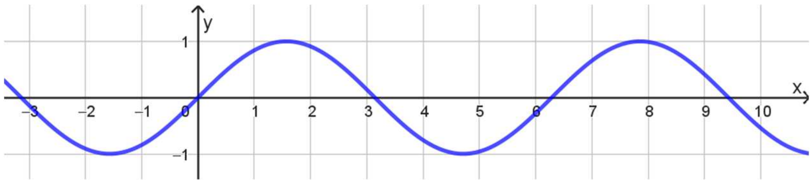


$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

11. Disegna le seguenti funzioni, utilizzando i grafici delle funzioni goniometriche:

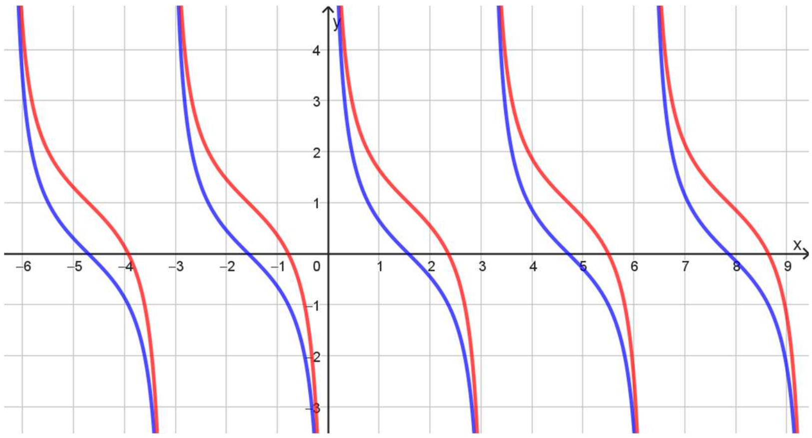
$$y = -\sin(-x) \qquad y = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x} \qquad y = \sin|x| \qquad y = \frac{1}{2}\sin 2x \qquad y = |\cos(-x)| + 1$$

$$y = -\sin(-x) = -(-\sin x) = \sin x$$

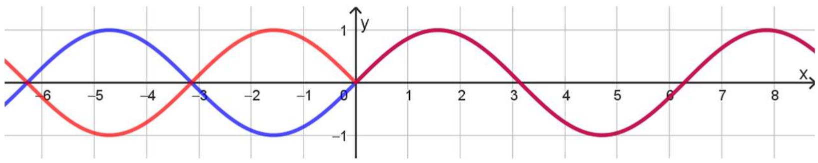


$$y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x} = \cot x + 1$$

($y = \cot x$ in blu, la funzione richiesta in rosso)



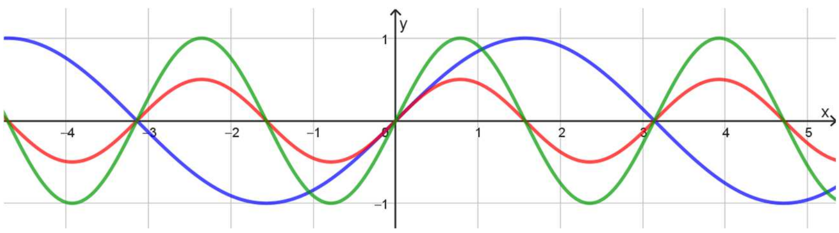
$y = \sin x$ in blu
La funzione richiesta in rosso



$y = \sin x$ in blu

$y = \sin 2x$ – contrazione lungo l'asse x – in verde

La funzione richiesta (con una contrazione lungo l'asse y) in rosso

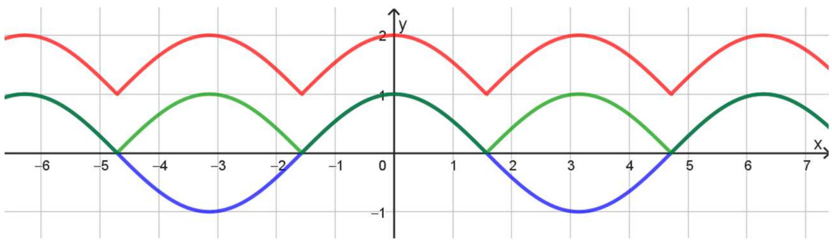


$$y = |\cos(-x)| + 1 = |\cos x| + 1$$

$y = \cos x$ in blu

$y = |\cos x|$ in verde

La funzione richiesta (con una traslazione parallela all'asse y di 1 verso l'alto) in rosso



12. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4}+\cos\pi\right)\left(3+\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}-\frac{3}{4}-1\right)(3+1)=\frac{1}{4}\cdot 4=\mathbf{1}$$

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}\right):\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right):\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right):(2-\sqrt{3})=\frac{2-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\mathbf{2}$$

$$\sqrt{2}\sin 45°-\sqrt{3}\cos 150°+\tan 120°-\cot 150°+\sin 210°+\sin^2 315°+\tan^2 135°-\cos^3 270°+\sec^2 180°=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1-0+1=1+\frac{3}{2}+1+1=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

13. Semplifica le seguenti espressioni servendoti delle relazioni fra le funzioni goniometriche, che si suppongono definite per i valori di α che si considerano:

$$\tan(\pi+\alpha)\left[1-\frac{1}{\sin(\pi-\alpha)}\right]+\frac{1}{\cos(2\pi-\alpha)}=\tan\alpha\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{\cos\alpha}=\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\boldsymbol{\tan\alpha}$$

$$\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha\ (\sin\alpha)-(-\sin\alpha)(\sin\alpha)=-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=\mathbf{0}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(\alpha+\pi)-\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha=\boldsymbol{-2\cos\alpha}$$

$$\frac{\tan(2\pi-\alpha)-\cot(\pi-\alpha)}{\cos(-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}-\sec(8\pi-\alpha)=\frac{-\tan\alpha+\cot\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\sec\alpha=\frac{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\sec\alpha=$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\sec\alpha=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha\ (\cos\alpha-\sin\alpha)}-\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}=\boldsymbol{cosec\,\alpha}$$

14. Verifica le seguenti identità, supponendo che α assuma solo valori per i quali sono definite le diverse funzioni e le diverse espressioni che in esse figurano:

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x \qquad \frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x \qquad \boldsymbol{\frac{1-\sin x\cos x}{1-\sin x\cos x}=1}$$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{cosec\,x+1}{cosec\,x-1} \qquad (1+\sin x)\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)=\left(\frac{1}{\sin x}+1\right)(1-\sin x)$$

$$\frac{1}{\sin x}-1+1-\sin x=\frac{1}{\sin x}-1+1-\sin x \qquad \mathbf{0=0}$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x-2\sin^4 x-\cos^4 x+\sin^2 x=0$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-2\sin^4 x-\cos^4 x+\sin^2 x=0$$

$$\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^4 x-\cos^4 x+\sin^2 x=0 \qquad -\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\sin^2 x=0$$

$$-\sin^4 x+\sin^2 x\ (1-\cos^2 x)=0 \qquad \boldsymbol{-\sin^4 x+\sin^4 x=0}$$