1. Completa la seguente tabella:

	$\cos\alpha$	$sen\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$\sec\alpha$	$cosec\,\alpha$
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{15}{17}$	$-\frac{8}{17}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{17}{15}$	$-\frac{17}{8}$
$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{13}{12}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

2. $\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sec\frac{\pi}{3}-sen\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\,cosec\frac{\pi}{4}-8\,sen^2\frac{\pi}{6}+2$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot 2-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}-8\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2+2=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3. $\frac{1}{2}\sec\frac{7}{4}\pi-\cos\frac{\pi}{4}-2\cos^2\frac{5}{6}\pi+\sqrt{3}cosec\frac{2}{3}\pi-3\,tg\frac{\pi}{6}+3\,ctg\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-3\frac{\sqrt{3}}{3}+3\frac{\sqrt{3}}{3}=-2\cdot\frac{3}{4}+2=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$$

4. $\frac{1}{2}sen\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{11}{6}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sec\frac{\pi}{4}+cosec\frac{\pi}{4}\right)+3\,ctg\frac{\pi}{3}\,tg\frac{\pi}{6}+cosec\frac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+2+1+2=6$$

5. $\dfrac{a^2\,tg\frac{\pi}{4}+ab\,cosec\frac{\pi}{6}+b^2\sec 0}{a\,cosec\frac{\pi}{2}-b\,sen\frac{3}{2}\pi}$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{a+b}=\boldsymbol{a+b}$$

Verifica le seguenti identità, supponendole valide nel proprio dominio:

6. $(4\,sen^2\alpha + \cos^2\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha}{1+3\,sen^2\alpha}\right) = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$

$$(4\,sen^2\alpha + 1 - sen^2\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha}{1+3\,sen^2\alpha}\right) = \frac{1}{1+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$(3\,sen^2\alpha + 1)\frac{\cos^2\alpha}{1+3\,sen^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + sen^2\alpha} \qquad \boldsymbol{\cos^2\alpha = \cos^2\alpha}$$

7. $\frac{1+sen^2\alpha}{tg^2\alpha} + 1 - \cos^2\alpha = cosec^2\alpha$

$$\frac{1}{tg^2\alpha} + sen^2\alpha \cdot \frac{1}{tg^2\alpha} + 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

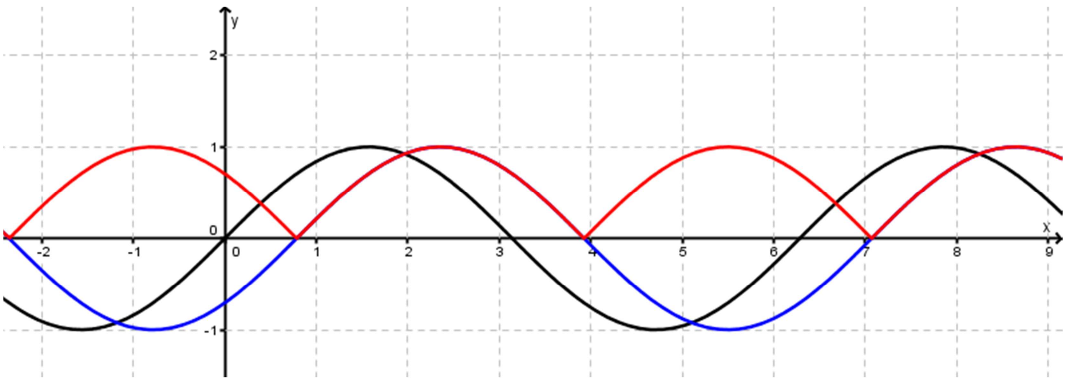
$$\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} + sen^2\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} + 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}}$$

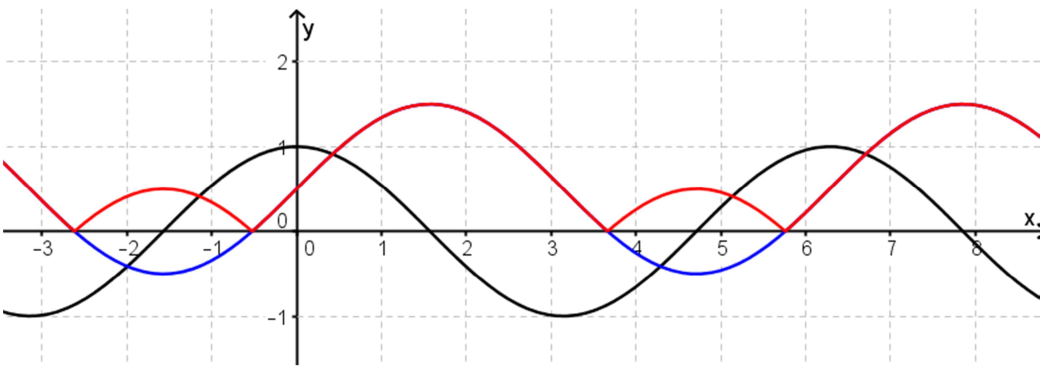
8. Traccia le curve relative alle seguenti funzioni:

$$y = \left|sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \qquad y = \left|\frac{1}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right| \qquad y = 2 - \sec x \qquad y = 1 - tg\,|x|$$

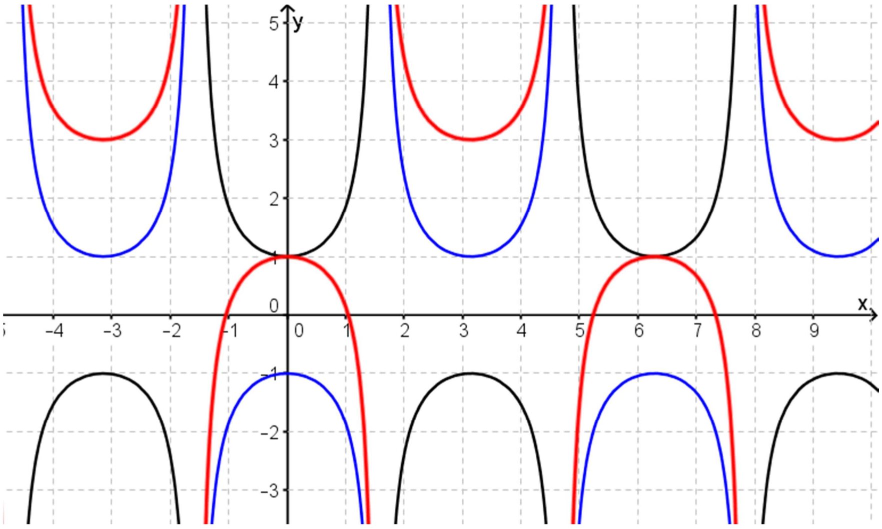
$\mathbf{f(x) = sin(x)}$
$\mathbf{g(x) = sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$
$\mathbf{h(x) = \left|sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|}$



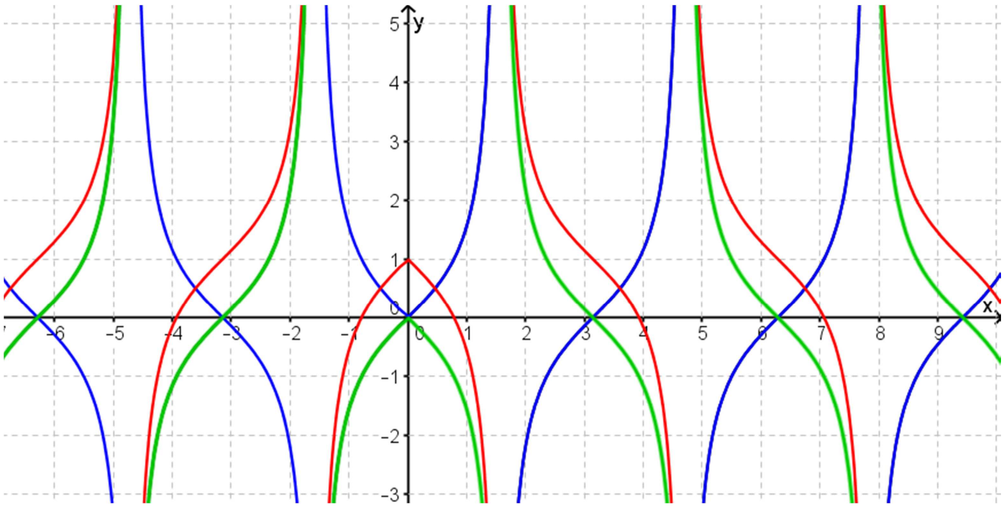
$\mathbf{f(x) = cos(x)}$
$\mathbf{g(x) = \frac{1}{2} + cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$
$\mathbf{h(x) = \left|\frac{1}{2} + cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|}$



f(x) = sec (x)
g(x) = − sec (x)
h(x) = 2 − sec (x)



f(x) = tan (x)
g(x) = tan (|x|)
h(x) = − tan (|x|)
h_1(x) = 1 − tan (|x|)



9. Scrivi l'equazione della retta passante per $P(2,-1)$ e formante con la direzione positiva dell'asse x l'angolo $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

L'equazione generica della retta passante per il punto dato e la cui inclinazione è nota è:

$$y - y_P = tg\ \alpha\ \ (x - x_P)$$

Sostituendo i valori numerici ottengo:

$$y + 1 = -1\ \ (x - 2) \qquad \boldsymbol{y = -x + 1}$$

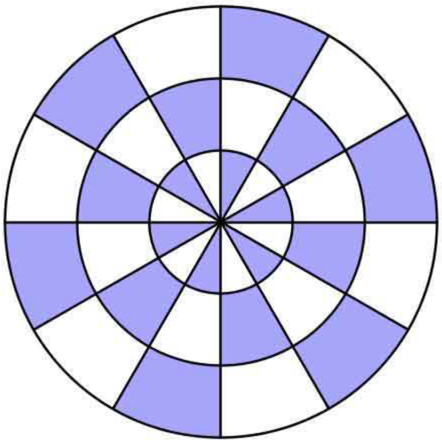
10. Determina il dominio delle seguenti funzioni:.

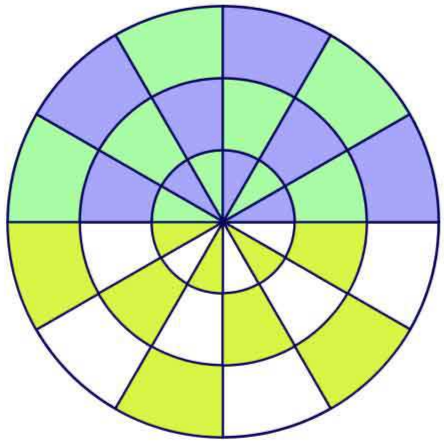
$$y = arc\cos\ (3x - 1) \qquad -1 \leq 3x - 1 \leq 1 \qquad 0 \leq 3x \leq 2 \qquad \boldsymbol{0 \leq x \leq \frac{2}{3}}$$

$$y = arc\ tg\ \frac{3x}{\sqrt{x-1}} \qquad \boldsymbol{x > 1}$$

$$y = arc\ ctg\ \frac{5x^2}{x^2 + x + 1} \qquad \mathbb{R}$$

11. Considerando che le tre circonferenze, concentriche, hanno raggi rispettivamente r, 2r e 3r, determina l'area della regione di piano evidenziata nella figura a lato.





Riporto le regioni indicate in gialle nella parte superiore del disegno, indicandole in verde chiaro.

A questo punto è evidente che l'area colorata corrisponde al semicerchio di raggio 3 r, perciò l'area vale:

$$A = \frac{1}{2}\pi\,(3r)^2 = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi r^2}$$

12. Data la relazione $senx = \frac{k}{k-1}$, determina:

A. Quali valori può assumere il parametro reale affinché abbia significato la relazione data

B. Quali valori può assumere il parametro reale se $x \in \left[\,0; \frac{\pi}{6}\right]$

C. L'espressione di cos x in funzione del parametro se $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

A. Perché la relazione abbia significato, considerate le limitazioni della funzione seno, deve verificarsi che:

$$-1 \le \frac{k}{k-1} \le 1 \qquad \begin{cases} \dfrac{2k-1}{k-1} \ge 0 \\ \dfrac{1}{k-1} \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \le \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad k > 1 \\ k < 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{k \le \frac{1}{2}}$$

B. Se $x \in \left[\,0; \frac{\pi}{6}\right]$ il valore del seno è compreso tra 0 e ½, perciò:

$$0 \le \frac{k}{k-1} \le \frac{1}{2} \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{k-1} \ge 0 \\ \dfrac{k+1}{2\,(k-1)} \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \le 0 \quad \vee \quad k > 1 \\ -1 \le k < 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{-1 \le k \le 0}$$

C. Considerato che, nell'intervallo indicato, il coseno assume valore negativo e che il seno ha valori compresi tra 0 e 1:

$$0 \le \frac{k}{k-1} \le 1 \qquad \begin{cases} \dfrac{k}{k-1} \ge 0 \\ \dfrac{1}{k-1} \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \le 0 \quad \vee \quad k > 1 \\ k < 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{k \le 0}$$

$$\cos x = -\sqrt{1 - sen^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{k^2}{(k-1)^2}} = -\sqrt{\frac{k^2 - 2k + 1 - k^2}{(k-1)^2}} = -\frac{\sqrt{1-2k}}{1-k} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{1-2k}}{k-1}}$$