1. Calcola il valore delle rimanenti funzioni goniometriche:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$\frac{12}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{5}{12}$
$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$	$-\frac{15}{17}$	$\frac{8}{17}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{8}{15}$

2. Risolvi la seguente equazione nell'incognita x:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi\right)x^2-2\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)x-1=0$$

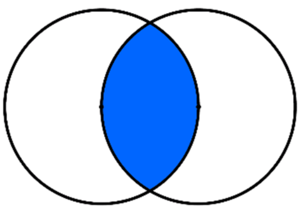
$$\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x-1=0 \qquad 3x^2-2\sqrt{2}\,x-2=0 \qquad x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+6}}{3}=\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$$

3. Determina i valori di k per i quali l'equazione $(2k-1)\sin x+6\cos^2 x=3k^2$ ammette soluzione $x=\frac{\pi}{6}$.

Sostituisco nell'equazione $x=\frac{\pi}{6}$:

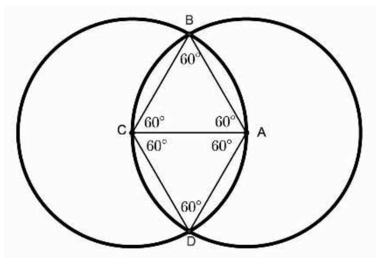
$$(2k-1)\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3k^2 \qquad 3k^2-k-4=0 \qquad k_{1,2}=\frac{1\pm7}{6}=\left\langle\begin{array}{l}-1\\ \frac{4}{3}\end{array}\right.$$

4. Le circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ della figura a lato hanno lo stesso raggio r e il centro dell'una appartiene all'altra. Quali sono perimetro e area della superficie colorata?

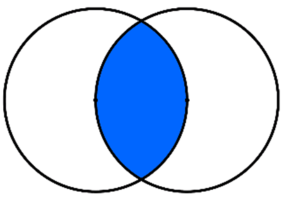


Per determinare il perimetro, ricostruisco il quadrilatero che ha come vertici i due punti di intersezione tra le circonferenze e i centri: si tratta di un rombo, formato da due triangoli equilateri. Perciò l'arco BCD (e di conseguenza anche l'arco BAD) sono 1/3 della circonferenza, quindi il perimetro:

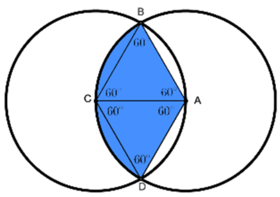
$$2p_{ABCD}=2\cdot\frac{2\pi r}{3}=\frac{4}{3}\pi r$$



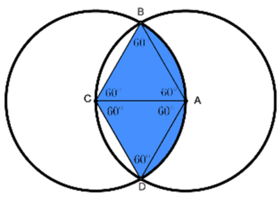
Per determinare l'area, eseguo la seguente operazione:



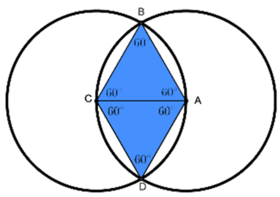
=



+



−



Quindi sommo due volte il terzo di cerchio e sottraggo l'area del rombo:

$$2\cdot\frac{\pi r^2}{3}-2\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$$

5. Semplifica le seguenti espressioni:

a.

$$a\sin\frac{\pi}{2}-2b\cos\pi+b\sin\frac{3}{2}\pi-\left(a\cos\frac{3}{2}\pi+b\cos\pi-a\sin\frac{3}{2}\pi\right)=a+2b-b-(-b+a)=a+b+b-a=\mathbf{2b}$$

b.

$$\frac{2}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5}{4}\pi\right)\left(\sin\frac{3}{4}\pi-\cos\frac{5}{6}\pi\right)-\left(\tan\frac{7}{6}\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{1}{3}+1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}=-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{3}}$$

c.

$$\left(\cos^2\frac{3}{4}\pi-\sin\frac{11}{6}\pi\right)^3-\left(\sqrt{3}\tan\frac{2}{3}\pi+\cos 2\pi\right)^4-\left(2\cos\frac{\pi}{4}+3\sin\frac{5}{4}\pi\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\right)^4-\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}=1-16-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}=1-16-\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2=1-16-2=\mathbf{-17}$$

d.

$$\sec\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha\tan\alpha+\sec\alpha\sin\alpha\,(\sin\alpha-\sin\pi)=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha-\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\sin\alpha\ (\sin\alpha)=\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\mathbf{\cos\alpha}$$

e.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\,(\pi-x)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan\,(\pi-x)+(\cos x+\sin x)^2+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\cos\,(\pi+x)=$$

$$=-\sin x+\sin x-\cot x\cdot\tan x+\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=\mathbf{0}$$

6. Verifica le seguenti identità supponendo che α assuma solo valori per i quali sono definite tutte le espressioni che vi compaiono:

a.

$$\sec\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha\tan\alpha \qquad \frac{1}{\cos\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \qquad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos\alpha}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos\alpha}}$$

b.

$$\frac{\cos\alpha\tan\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha}-\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha}{2\sin^2\alpha-1}=\csc\alpha \qquad \frac{\cos\alpha\ (\tan\alpha+1)}{\tan\alpha\ (\tan\alpha+1)}-\frac{\sin\alpha\ (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin^2\alpha-1}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\frac{\sin\alpha\ (1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin^2\alpha-1}=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha\,(1-2\sin^2\alpha)}{-(1-2\sin^2\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sin\alpha}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sin\alpha}}$$