1. Determina per quale valore $k \in \mathbb{R}^+$ la funzione $f(x) = (e^{3x} - 1)\ln\left(1 + 3x^k\right)$ è un infinitesimo di ordine 5 per $x \to 0$.

Perché sia un infinitesimo di ordine 5 deve essere finito e non nullo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x} - 1)\ln(1 + 3x^k)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot 3x^k}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^k}{x^4}$$

Perché il limite sia finito e non nullo, numeratore e denominatore devono avere lo stesso grado, perciò:

$$\boldsymbol{k = 4}$$

2. Calcola i seguenti limiti, tenendo presente il principio di sostituzione degli infinitesimi, la gerarchia degli infiniti e il principio di sostituzione degli infiniti:

A. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln\,(1 - 5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{-5x} = -\frac{3}{5}$$

B. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 1 - \cos x}{x^2\,(1 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \frac{1}{2}x^2}{x^2\,(1 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x^2\,(1 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{2}}{1 - x^2} = \frac{1}{2}$$

C. $$\lim_{x\to 2} \frac{sen\,(x - 2)}{e^{x^2 - 4} - 1} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

D. $$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2\,3x}{\ln^2\,(1 + 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

E. $$\lim_{x\to +\infty} \left(x + \ln\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

F. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + \ln^3 x}{x^{10} + e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

G. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x} + e^{2x} + \ln 5x}{e^{3x} + x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{3x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

H. $$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{2x}}} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{2x}} = 1$$

3. È data la funzione $f(x)=\frac{2x^2+3x-a}{ax^2+bx-4}$. Determina i parametri a e b in modo ch $x=1$e sia un punto di discontinuità di terza specie per $f(x)$.

Perché sia un punto di discontinuità di terza specie, $x=1$ deve essere uno zero di entrambi i polinomi, quello a numeratore e quello a denominatore:

$$\begin{cases} 2+3-a=0 \\ a+b-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a=5} \\ \boldsymbol{b=-1} \end{cases}$$

La funzione data è: $f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{5x^2-x-4}=\frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(5x+4)}$ che presenta effettivamente un punto di discontinuità di terza specie in $x=1$.

4. Determina i punti di discontinuità e la relativa specie delle seguenti funzioni:

A. $f(x)=2^{\frac{x^2}{x-2}}$ B. $f(x)=\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$ C. $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & x>0 \\ 1+\sqrt[3]{x} & x<0 \end{cases}$

A. Dominio: $D=]-\infty;2[\cup]2;-\infty[$

$$\lim_{x\to 2^-} 2^{\frac{x^2}{x-2}}=0 \qquad \lim_{x\to 2^+} 2^{\frac{x^2}{x-2}}=+\infty$$

Si tratta di un punto di discontinuità di **seconda specie**, visto che il secondo limite è infinito.

B. Dominio: $D=]-\infty;0[\cup]0;-\infty[$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}=1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}=0$$

Si tratta di un punto di discontinuità di **prima specie**, visto che entrambi i limiti esistono e sono finiti, ma diversi tra loro.

C. Dominio: $D=]-\infty;0[\cup]0;-\infty[$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

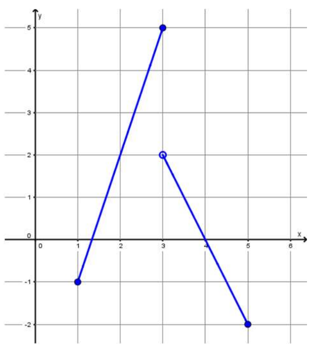
Si tratta di un punto di discontinuità di **terza specie**, visto che limite destro e sinistri sono finiti e uguali, ma la funzione nel punto in questione non è definita.

5. Enuncia il teorema dei valori intermedi. Mostra, con un grafico, che una funzione può soddisfare la tesi del teorema, ma non le sue ipotesi.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI: Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

L'intervallo chiuso e limitato è $[1;5]$.

La funzione assume tutti i valori compresi tra il minimo -2 e il massimo 5, perciò è verificata la tesi del teorema, ma non è continua, come richiesto dalle ipotesi del teorema.



6. Stabilisci per quali valori del parametro k la funzione $f(x) = kx^5 - x + 2k + 2$ ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo $[1; 2]$.

La funzione è continua, in quanto razionale intera, nell'intervallo chiuso e limitato dato, perciò deve solo verificarsi che:

$$f(1)\, f(2) < 0 \qquad \Rightarrow \quad (k - 1 + 2k + 2)(32k - 2 + 2k + 2) < 0$$

$$34\, k\, (3k + 1) < 0 \qquad\qquad \boldsymbol{-\frac{1}{3} < k < 0}$$

7. Determina le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x^2-x-1}{2x-4}$.

$$D =]-\infty; 2[\, \cup\,]2; +\infty[$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - x - 1}{2(x-2)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 1}{2(x-2)} = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 2 \quad asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{2(x-2)} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{2(x-2)} = +\infty \qquad può\ esistere\ asintoto\ obliquo$$

$$\mathrm{m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2 - x - 1}{2(x-2)}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 1}{2x\,(x-2)} = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{q} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{2(x-2)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 1 - x^2 + 2x}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

L'asintoto obliquo ha equazione:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

8. Determina, se possibile, per quali valori del parametro k il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{kx^2 + 2\,(1-k)\,x + k - 3}$$

A. non ha asintoti verticali;
B. ha come asintoto orizzontale la retta $y - 3 = 0$;
C. ha come asintoto orizzontale l'asse x.

A. Perché non abbia asintoti verticali, il denominatore deve essere un polinomio irriducibile, ovvero $\Delta < 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = (1-k)^2 - k\,(k-3) < 0 \qquad 1 - 2k + k^2 - k^2 + 3k < 0 \qquad \boldsymbol{k < -1}$$

B.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{kx^2 + 2\,(1-k)\,x + k - 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{kx^2} = \frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k} = 3 \qquad k = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

C.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{kx^2 + 2\,(1-k)\,x + k - 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{kx^2} = \frac{1}{k} \qquad \frac{1}{k} = 0 \qquad \nexists \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$