1. Stabilisci per quale valore del parametro a la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\ ax}{x} & se\ x < 0 \\ x^2 + 2a + 1 & se\ x \geq 0 \end{cases}$ è continua.

I due tratti della funzione sono entrambi continui nel proprio intervallo di definizione.
Devo quindi considerare il punto x = 0. Perché la funzione sia continua in tale punto, i limiti destro e sinistro in x = 0 devono essere uguali tra loro e uguali al valore assunto dalla funzione quando x = 0:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen\ ax}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 2a + 1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{x} = a \qquad \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 2a + 1) = 2a + 1 \qquad f(0) = 2a + 1$$

$$a = 2a + 1 \qquad a = \mathbf{-1}$$

2. Calcola i seguenti limiti, tenendo presente, se necessario, il principio di sostituzione degli infinitesimi, la gerarchia degli infiniti e il principio di sostituzione degli infiniti:

A. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\ (1+4x)}{e^{-2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{-2x} = \mathbf{-2}$

B. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \cos x - 1}{x^2 + 3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^2}{x^2\ (1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\ x^2}{x^2\ (1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}}{1+3x} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

C. $\lim_{x\to 3} \frac{1 - cos\ (x-3)}{e^{(x-3)^2} - 1} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{(x-3)^2}{2}}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{2\ (x-3)^2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

D. $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2\ 2x + 3x^2}{\ln\ (1+2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)^2 + 3x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2}{2x^2} = \mathbf{\frac{7}{2}}$

E. $\lim_{x\to -\infty} \left(x + \ln \frac{1}{|x|}\right) = -\infty$

F. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{10} + e^x}{x^2 + \ln^3 x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

G. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2} + x^3}{\sqrt{x} + e^{2x} + \ln\ 5x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{x^2 - 2x} = +\infty$

H. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{0}$

3. Trova per quali valori del parametro a la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & se\ x \le 0 \\ x^2 - a & se\ x > 0 \end{cases}$ ammette una discontinuità di prima specie con salto uguale a 3 in $x = 0$.

Calcolo limite destro e limite sinistro e pongo il salto uguale a 3:

$$\lim_{x \to 0^-} (e^x + 1) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} (x^2 - a) = -a$$

$$|2 + a| = 3 \qquad \begin{array}{cc} 2 + a = 3 & a = \mathbf{1} \\ 2 + a = -3 & a = \mathbf{-5} \end{array}$$

4. Determina i punti di discontinuità e la relativa specie delle seguenti funzioni:

A. $f(x) = \dfrac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}}$ B. $f(x) = sen\dfrac{1}{x}$ C. $f(x) = \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$

A. Dominio: $D =]-\infty; 0[\cup]0; -\infty[$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{5} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{5 + 3^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Si tratta di un punto di discontinuità di **prima specie**, visto che entrambi i limiti esistono e sono finiti, ma diversi tra loro.

B. Dominio: $D =]-\infty; 0[\cup]0; -\infty[$

$$\lim_{x \to 0^-} sen\frac{1}{x} = non\ esiste$$

Si tratta di un punto di discontinuità di **seconda specie**, visto che almeno uno dei due limiti non esiste.

C. Dominio: $D =]-\infty; 1[\cup]1; -\infty[$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

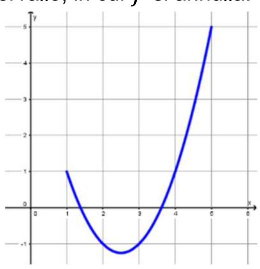
Si tratta di un punto di discontinuità di **terza specie**, visto che limite destro e sinistri sono finiti e uguali, ma la funzione nel punto in questione non è definita.

5. Enuncia il teorema di esistenza degli zeri. Mostra, con un grafico, che una funzione può soddisfare la tesi del teorema, ma non tutte le sue ipotesi.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui f si annulla.

L'intervallo chiuso e limitato è $[1; 5]$.

La funzione si annulla in due punti, ma negli estremi di tale intervallo la funzione non assume valori di segno opposto.



6. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} - 5$: ci sono punti interni all'intervallo $[-1; 5]$ in cui la funzione si annulla?

Determino innanzi tutto il dominio della funzione:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -6 \end{cases} \qquad x \geq -1$$

La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1; 5]$. Se viene verificata anche l'ultima ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, potrò rispondere positivamente alla domanda:

$$f(-1) = \sqrt{5} - 5 < 0 \qquad f(5) = \sqrt{6} + \sqrt{11} - 5 > 0$$

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema, perciò **esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione si annulla**.

7. Determina le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = 3x\, e^{\frac{1}{2+x}}$.

$$D =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -2^-} 3x\, e^{\frac{1}{2+x}} = 0 \qquad \lim_{x \to -2^+} 3x\, e^{\frac{1}{2+x}} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = -2 \quad asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x\, e^{\frac{1}{2+x}} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} 3x\, e^{\frac{1}{2+x}} = +\infty \qquad può\ esistere\ asintoto\ obliquo$$

$$\mathrm{m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x\, e^{\frac{1}{2+x}}}{x} = 3 \qquad \mathrm{q} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(3x\, e^{\frac{1}{2+x}} - 3x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[3x \left(e^{\frac{1}{2+x}} - 1\right)\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x+2} = 3$$

L'asintoto obliquo ha equazione:

$$\boldsymbol{y = 3x + 3}$$

8. Il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{cx - 1}$$

ha come asintoti le rette di equazione $y = x$ e $x = \frac{1}{4}$. Trova a, b e c.

Perché non abbia asintoto verticale $x = \frac{1}{4}$, trattandosi di una funzione razionale fratta il dominio deve essere: $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$. Il dominio della funzione data è $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{c}\right\}$, perciò:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{c = 4}$$

Determiniamo invece l'equazione dell'asintoto obliquo:

$$\mathrm{m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{ax^2 + bx}{4x - 1}}{x} = \frac{a}{4} \qquad \mathrm{q} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{ax^2 + bx}{4x - 1} - \frac{a}{4}x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4ax^2 + 4bx - 4ax^2 + ax}{4\,(4x - 1)} = \frac{4b + a}{16}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{4} = 1 \\ \frac{4b + a}{16} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = \boldsymbol{4} \\ b = \boldsymbol{-1} \end{cases}$$