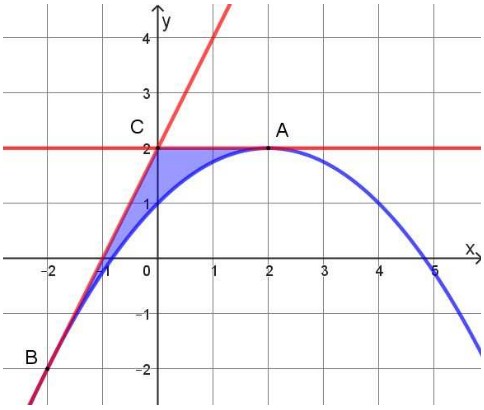
1. Data la parabola di equazione $y=-\frac{1}{4}x^2+x+1$, determina le equazioni delle tangenti condotte nei suoi punti di ascissa ± 2. Determinato il punto C di intersezione delle due tangenti e indicati con A e B i punti di tangenza, determina l'area del triangolo mistilineo ACB, dove un lato è rappresentato dall'arco di parabola compreso tra i punti di tangenza.



Determino le coordinate dei punti di ascissa ± 2 appartenenti alla parabola, sostituendo le ascisse date nell'equazione della parabola:

$$y=-\frac{1}{4}\cdot 2^2+2+1=2 \qquad \boldsymbol{A\ (2;2)}$$

$$y=-\frac{1}{4}\cdot(-2)^2-2+1=2 \qquad \boldsymbol{B\ (-2;-2)}$$

Per determinare le equazioni delle tangenti, applico la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y+y_o}{2}=axx_o+b\frac{x+x_o}{2}+c$$

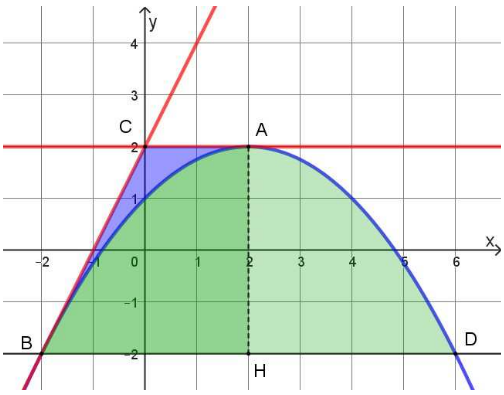
dove a, b e c sono i coefficienti dell'equazione della parabola e $(x_o;y_o)$ le coordinate del punto di tangenza.

$$\frac{y+2}{2}=-\frac{1}{4}\cdot 2x+1\frac{x+2}{2}+1 \qquad y+2=-x+x+2+2 \qquad \boldsymbol{t_A: y=2}$$

$$\frac{y-2}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(-2)\,x+1\frac{x-2}{2}+1 \qquad y-2=x+x-2+2 \qquad \boldsymbol{t_B: y=2x+2}$$

Determino il punto di intersezione delle due tangenti, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y=2 \\ y=2x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2 \\ 2=2x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{C\ (0;2)}$$



Il triangolo mistilineo è quello evidenziato in figura in blu. Procedo a determinare l'area del segmento parabolico $\mathcal{A}_{DAB}$ delimitato dalla retta $y=-2$ passante per il punto B e parallela alla tangente in A alla parabola (dove A coincide con il vertice della parabola). Il punto D ha coordinate:

$$\begin{cases} y=-2 \\ y=-\frac{1}{4}x^2+x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4}x^2-x-3=0 \\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2 \ \vee \ x=6 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$D(6;\,-2)$$

Perciò l'area del segmento parabolico misura:

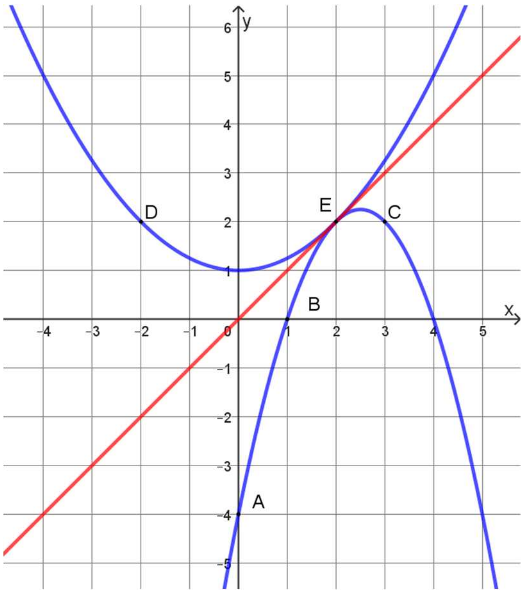
$$\mathcal{A}_{DAB}=\frac{2}{3}\cdot\overline{BD}\cdot d(B;y=2)=\frac{2}{3}|6+2|\cdot|-2-2|=\frac{64}{3}$$

Nella figura ho rappresentato AH, asse di simmetria del segmento parabolico, visto che A è il vertice della parabola e H punto medio tra B e D, quindi punto dell'asse di simmetria della parabola. L'area indicata con un verde più marcato è, quindi, metà di quella del segmento parabolico. A questo punto posso ottenere l'area del triangolo mistilineo come differenza tra l'area del trapezio rettangolo BHAC e la metà dell'area del segmento parabolico:

$$\overline{CA}=|0-2|=2 \qquad \overline{AH}=d(A;y=-2)=|2+2|=4 \qquad \overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\cdot 8=4$$

$$\mathcal{A}_{BAC}=\mathcal{A}_{BHAC}-\frac{1}{2}\mathcal{A}_{DAB}=\frac{1}{2}(\overline{BH}+\overline{AC})\cdot\overline{AH}-\frac{1}{2}\mathcal{A}_{DAB}=\frac{1}{2}(4+2)\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{3}=12-\frac{32}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

2. Due parabole, con l'asse parallelo all'asse y, sono tra loro tangenti in un punto di ascissa 2; la prima passa per i punti $A(0;-4)$, $B(1;0)$, $C(3;2)$, mentre la seconda passa per il punto $D\ (-2;2)$. Determina le loro equazioni e le coordinate del punto di tangenza.
Verificato che l'equazione della parabola con concavità positiva è $y=\frac{1}{4}x^2+1$, calcola l'area del quadrilatero convesso, che ha i vertici nei fuochi e nei vertici delle parabole.



La parabola con asse parallelo all'asse y ha equazione $y=ax^2+bx+c$. Per determinare l'equazione della prima parabola, impongo il passaggio della parabola per i punti A, B e C, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione generica e risolvendo il sistema in a, b e c:

$$\begin{cases}-4=0+0+c\\0=a+b+c\\2=9a+3b+c\end{cases}\qquad\begin{cases}c=-4\\b=4-a\\9a+12-3a-4=2\end{cases}\qquad\begin{cases}a=-1\\b=5\\c=-4\end{cases}$$

L'equazione della prima parabola è: $\boldsymbol{\mathcal{P}_1: y=-x^2+5x-4}$.
La seconda parabola passa per il punto di ascissa 2 E della prima parabola: ne determino le coordinate:

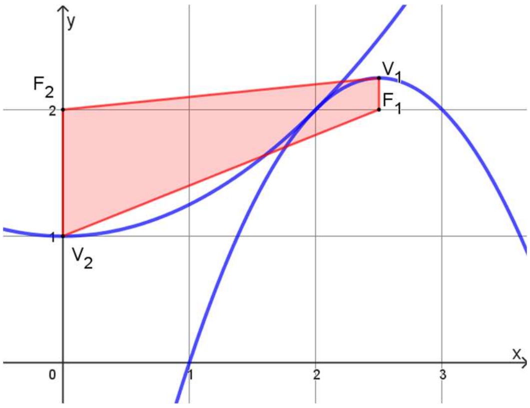
$$\begin{cases}x=2\\y=-x^2+5x-4\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\qquad E\ (2;2)$$

Determino l'equazione del fascio di parabole tangenti in E, usando la parabola degenere $(x-2)^2$ e la parabola $\mathcal{P}_1$ come generatrici:

$$\mathcal{F}: y=-x^2+5x-4+k(x-2)^2$$

Ora posso imporre il passaggio del fascio per il punto D (sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio e determinando il corrispondente parametro k) per trovare l'equazione della seconda parabola:

$$2=-4-10-4+k(-2-2)^2\qquad k=\frac{5}{4}\qquad y=-x^2+5x-4+\frac{5}{4}(x^2-4x+4)\qquad \boldsymbol{\mathcal{P}_2: y=\frac{1}{4}x^2+1}$$



Determino le coordinate di fuochi e vertici delle due parabole, ricordando che hanno coordinate generiche:

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\qquad F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

$$\Delta_1=9:\quad V_1\left(\frac{5}{2};\frac{9}{4}\right)\quad F_1\left(\frac{5}{2};2\right)\qquad \Delta_2=-1:\quad V_2(0;1)\quad F_2(0;2)$$

Il quadrilatero indicato in figura avendo una coppia di lati opposti paralleli (il vertice e il fuoco di una parabola appartengono all'asse di simmetria e entrambi gli assi di simmetria sono paralleli all'asse y, quindi paralleli tra loro) è un trapezio, perciò posso calcolarne l'area:

$$\overline{V_1F_1}=\left|\frac{9}{4}-2\right|=\frac{1}{4}\qquad \overline{V_2F_2}=|\,1-2\,|=1\qquad h=d(V_1,asse\ y)=x_{V_1}=\frac{5}{2}$$

$$\mathcal{A}_{F_1V_1F_2V_2}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{V_1F_1}+\overline{V_2F_2})\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)\cdot\frac{5}{2}=\boldsymbol{\frac{25}{16}}$$

3. In un piano cartesiano Oxy, rappresenta la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = -2x^2 + 11x + 6$.
   A. Conduci una retta r, parallela all'asse x, in modo che per il rettangolo MNPQ, avente i vertici M ed N nei punti di intersezione della retta r con l'arco di parabola $\mathcal{P}$ del primo quadrante ed i vertici P e Q sull'asse x, risulti $\overline{NP} = 2\overline{MN}$.
   B. Determina sull'arco parabolico di $\mathcal{P}$, giacente nel primo quadrante, un punto R in modo che l'area del quadrilatero OARC sia 48, essendo A e C le intersezioni di $\mathcal{P}$ rispettivamente col semiasse positivo delle x e con l'asse y.

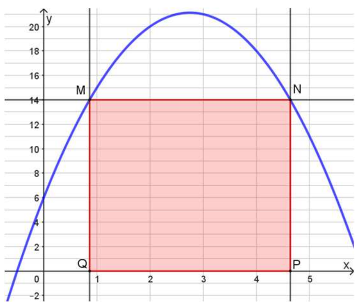
Per rappresentare la parabola, determino il vertice di coordinate generiche $V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$: $\Delta = 121 + 48 = 169$ $\quad V\left(\frac{11}{4}; \frac{169}{8}\right)$

Individuo, inoltre, i punti A e C di intersezione, rispettivamente, con il semiasse positivo delle x e con l'asse y (che mi serviranno più avanti):

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 11x + 6 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{-11 \pm 13}{-4} = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \qquad \boldsymbol{A(6;0)}$$

Le coordinate del punto di intersezione con l'asse y sono presto individuate, visto che l'ordinata è data dal termine noto nell'equazione della parabola: $\boldsymbol{C(0;\ 6)}$. Per rappresentare più comodamente la parabola uso unità di misura diverse per l'asse x e l'asse y.

A. Considero la retta parallela all'asse x, $y = k$ (con $k > 0$) e rappresento il rettangolo citato, determinando le coordinate dei suoi vertici:



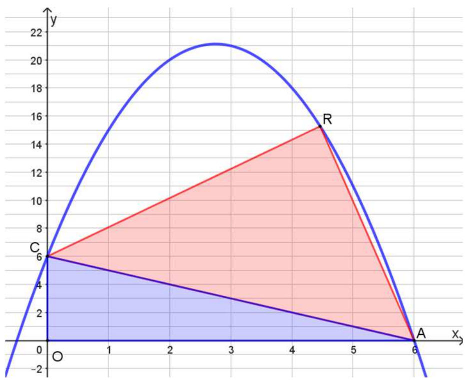
$$\begin{cases} y = k \\ y = -2x^2 + 11x + 6 \end{cases} \qquad 2x^2 - 11x - 6 + k = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{169 - 8k}}{4}$$

$$M\left(\frac{11 + \sqrt{169 - 8k}}{4}; k\right) \qquad N\left(\frac{11 - \sqrt{169 - 8k}}{4}; k\right)$$

Determino le lunghezze dei lati richiesti: $\overline{NP} = k$ e $\overline{MN} = \frac{1}{2}\sqrt{169 - 8k}$. Sostituendo, ottengo:

$$k = \sqrt{169 - 8k} \qquad k^2 + 8k - 169 = 0 \qquad k_{1,2} = -4 \pm \sqrt{185} = \left\langle \begin{array}{l} [-4 - \sqrt{185}] \\ -4 + \sqrt{185} \end{array} \right.$$

B. Per determinare l'area del quadrilatero OARC, divido innanzi tutto il quadrilatero in due triangoli (indicati in rosso e in blu nella figura) e l'area di quello blu è presto determinata, trattandosi di un triangolo rettangolo:



$$\mathcal{A}_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{2} \cdot x_A \cdot y_C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$$

A questo punto so che l'area del triangolo rosso deve essere uguale a $48 - 18 = 30$.
Il generico punto R ha coordinate $R\ (x;\ -2x^2 + 11x + 6)$ con $0 \le x \le 6$.
Calcolo l'area del triangolo ARC e la pongo uguale a 30: $\mathcal{A}_{ARC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot d(R; r)$
Determino l'equazione della retta r passante per A e per C:

$$r: \frac{x - x_C}{x_A - x_C} = \frac{y - y_C}{y_A - y_C} \qquad \frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 6}{0 - 6} \qquad r: x + y - 6 = 0$$

$$d(R; r) = \frac{|x - 2x^2 + 11x + 6 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-2x^2 + 12x|}{\sqrt{2}}$$

Per quanto riguarda il valore assoluto, ricordo che: $|-2x^2 + 12x| = \begin{cases} -2x^2 + 12x & 0 \le x \le 6 \\ 2x^2 - 12x & x < 0 \ \vee \ x > 6 \end{cases}$

E dato che R è sull'arco di parabola del primo quadrante, ovvero con $0 \le x \le 6$, posso togliere il valore assoluto e scrivere:

$$\mathcal{A}_{ARC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot d(R; r) = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} \cdot \frac{-2x^2 + 12x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2}\,\frac{2(-x^2 + 6x)}{\sqrt{2}} = 6(-x^2 + 6x)$$

Pongo l'area uguale a 30 e risolvo l'equazione, determinando l'ascissa di R:

$$6(-x^2 + 6x) = 30 \qquad x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad (x - 1)(x - 5) = 0 \qquad \begin{array}{ll} x_1 = 1 & \boldsymbol{R_1(1; 15)} \\ x_2 = 5 & \boldsymbol{R_2(5; 11)} \end{array}$$