1. Determina i valori dei parametri reali *p* e *q* in modo che la funzione $y = \frac{2x^3+a}{(x+b)^2}$ passi per il punto $\left(1; \frac{1}{4}\right)$ e abbia come asintoto la retta $x = -3$. Ricerca quindi gli ulteriori asintoti.

Se ha come asintoto la retta $x = -3$, significa che

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 + a}{(x+b)^2} = \infty$$

E questo si può verificare solo se $\boldsymbol{b = +3}$.

Impongo il passaggio della funzione per il punto dato, sostituendo le coordinate del punto nella generica equazione della funzione:

$$\frac{1}{4} = \frac{2+a}{16} \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 + a \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

La funzione richiesta è: $y = \frac{2x^3+2}{(x+3)^2}$

Determino l'equazione dell'asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+2}{(x+3)^2} \cdot \frac{1}{x} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3+2}{(x+3)^2} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 2 - 2x^3 - 12x^2 - 18x}{(x+3)^2} = -12$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è:

$$\boldsymbol{y = 2x - 12}$$

2. Data la funzione: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{ax+1} & se\ x \leq 0 \\ x^2 + 5x + b & se\ x > 0 \end{cases}$

Trova per quali valori di a e b la funzione è continua in $x = 0$ e passa per il punto $(-1; 2)$.

Perché la funzione sia continua in $x = 0$, deve verificarsi:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-3}{ax+1} = -3 = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 5x + b) = b$$

Perciò $\boldsymbol{b = -3}$

È d'obbligo verificare inoltre che $f(0) = \frac{0-3}{0+1} = 3$.

Impongo il passaggio della funzione per il punto dato, sostituendo le coordinate del punto nella generica equazione della funzione:

$$2 = \frac{-1-3}{-a+1} \quad \Rightarrow \quad 2\,(1-a) = -4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 3}$$

La funzione richiesta è:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{3x+1} & se\ x \leq 0 \\ x^2 + 5x - 3 & se\ x > 0 \end{cases}}$$

3. Determina a, b e c nella funzione $y = \frac{ax^3+bx^2+x}{x^2-c}$, sapendo che il suo grafico ha come asintoti le rette $x = \pm 2$ e $y = 2x$.

Se ha come asintoto la retta $x = \pm 2$, significa che

$$\lim_{x\to\pm 2} \frac{ax^3 + bx^2 + x}{x^2 - c} = \infty$$

E questo si può verificare solo se $\boldsymbol{c = +4}$.

Se ha come asintoto la retta $y = 2x$, significa che

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x}{x^2 - 4} \cdot \frac{1}{x} = a$$

E questo si può verificare solo se $\boldsymbol{a = +2}$.

Inoltre:

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + x}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + bx^2 + x - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} = b$$

E questo si può verificare solo se $\boldsymbol{b = 0}$.

La funzione richiesta è:

$$\boldsymbol{y = \frac{2x^3 + x}{x^2 - 4}}$$

4. Traccia il grafico probabile di: $y=\frac{3x}{x^2-4}$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta.

Per determinare il dominio, pongo il denominatore diverso da zero, perciò: $x^2-4\neq 0$

$$\boldsymbol{D=]-\infty;\ -2[\cup]-2;2[\cup]2;\ +\infty[}$$

Data la simmetria del dominio, verifico se si tratta di una funzione pari o dispari:

$$f(-x)=-\frac{3x}{x^2-4}=-f(x)$$

Perciò la funzione è **dispari**.

Determino le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani, mettendo a sistema l'equazione della funzione con quella dell'asse x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3x}{x^2-4} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{O(0;0)}$$

Si tratta dell'unico punto di intersezione con gli assi, visto che, avendo già trovato l'unica intersezione con l'asse y, non ha senso continuare a cercare le intersezioni con gli assi.

Determino gli intervalli di positività della funzione:

$$\frac{3x}{x^2-4}>0 \qquad \begin{matrix} N>0:\ x>0 \\ D>0:\ x<-2 \ \vee \ x>2 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{f(x)>0:\ -2<x<0 \ \vee \ x>2}$$

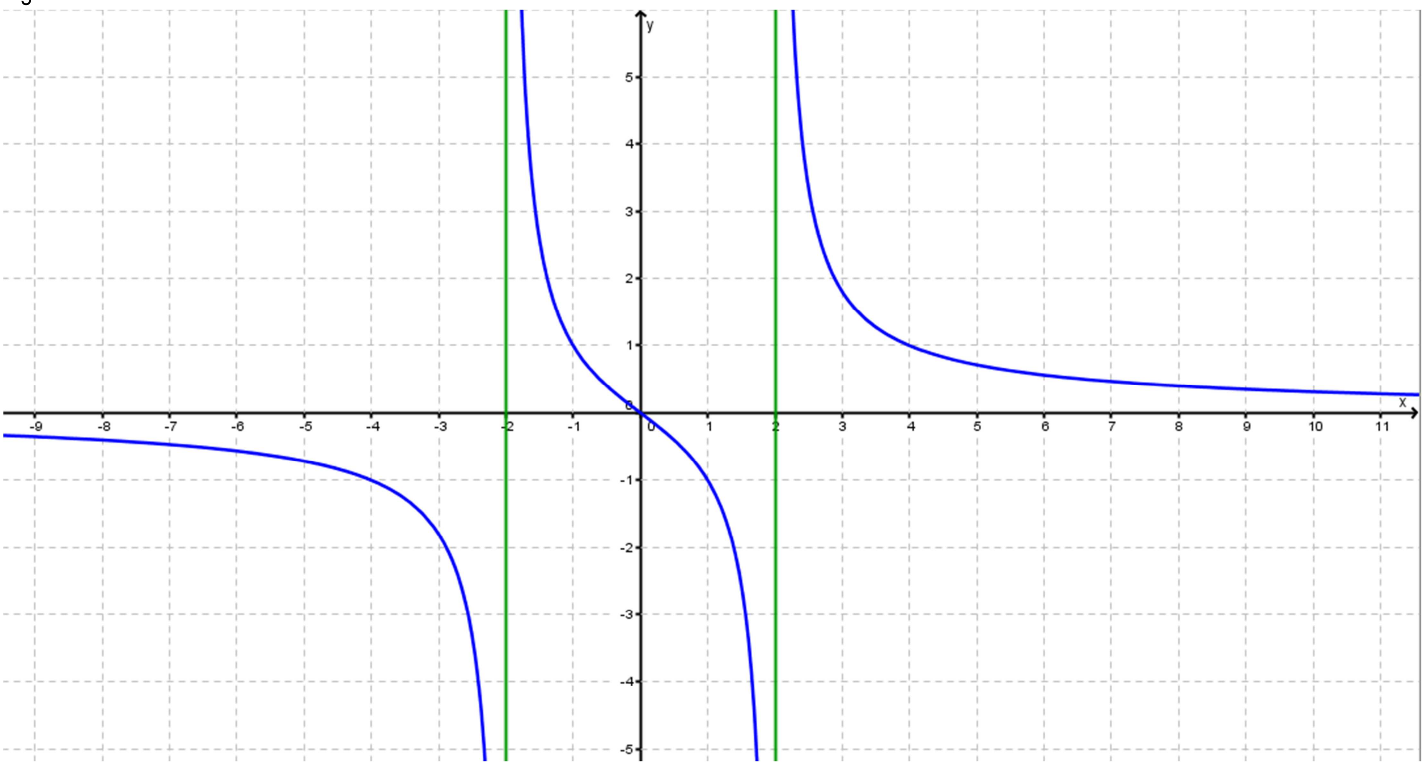
Determino gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2-4}=0 \qquad \boldsymbol{y=0}\ \ asintoto\ orizzontale$$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{3x}{x^2-4}=\pm\infty \qquad \boldsymbol{x=-2}\ \ asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x\to2^{\pm}}\frac{3x}{x^2-4}=\pm\infty \qquad \boldsymbol{x=2}\ \ asintoto\ verticale$$

Il grafico della funzione è:



5. Traccia il grafico probabile di: $y = \log_3 \frac{x+1}{x-3}$

Si tratta di una funzione trascendente.

Per determinare il dominio, pongo l'argomento del logaritmo maggiore di zero, perciò: $\frac{x+1}{x-3} > 0$

$$\boldsymbol{D =]-\infty;\ -1[\cup]3;\ +\infty[}$$

Data l'asimmetria del dominio, sicuramente la funzione non sarà né pari né dispari.

Determino le eventuali intersezioni della funzione con l'asse x, non considerando l'asse y, che è invece escluso dal dominio:

$$\begin{cases} y = \log_3 \dfrac{x+1}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1+3}{x-3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{non}\ ci\ sono\ intersezioni\ con\ l'asse x$$

Determino gli intervalli di positività della funzione:

$$\log_3 \frac{x+1}{x-3} > 0 \qquad \frac{x+1}{x-3} > 1 \qquad \frac{4}{x-3} > 0$$

$$\boldsymbol{f(x) > 0: x > 3}$$

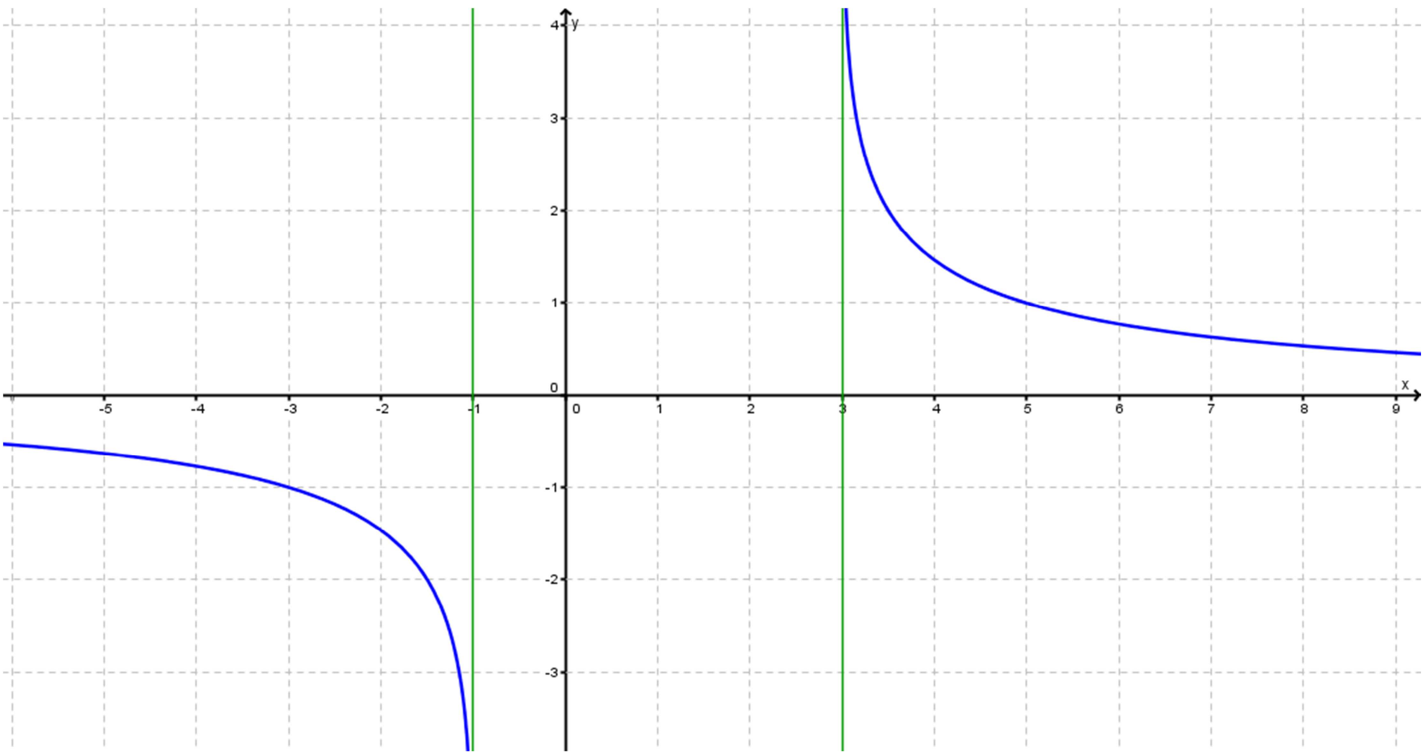
Determino gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log_3 \frac{x+1}{x-3} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0}\ \ asintoto\ orizzontale$$

$$\lim_{x\to-1^-} \log_3 \frac{x+1}{x-3} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = -1}\ \ asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x\to3^+} \log_3 \frac{x+1}{x-3} = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 3}\ \ asintoto\ verticale$$

Il grafico della funzione è:



6. Traccia il grafico probabile di: $y = 2^{\frac{x+2}{x-1}}$

Si tratta di una funzione trascendente.

Per determinare il dominio, pongo il denominatore dell'esponente dell'esponenziale diverso da zero, perciò: $x - 1 \neq 0$

$$\boldsymbol{D =]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[}$$

Data l'asimmetria del dominio, sicuramente la funzione non sarà né pari né dispari.

Determino le eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 2^{\frac{x+2}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{\frac{x+2}{x-1}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \textbf{\textit{non}}\ \textit{ci sono intersezioni con l'asse}\ x$$

$$\begin{cases} y = 2^{\frac{x+2}{x-1}} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\left(0; \frac{1}{4}\right)}$$

Determino gli intervalli di positività della funzione:

$$2^{\frac{x+2}{x-1}} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{f(x) > 0 \colon \forall x \in \mathbb{R}}$$

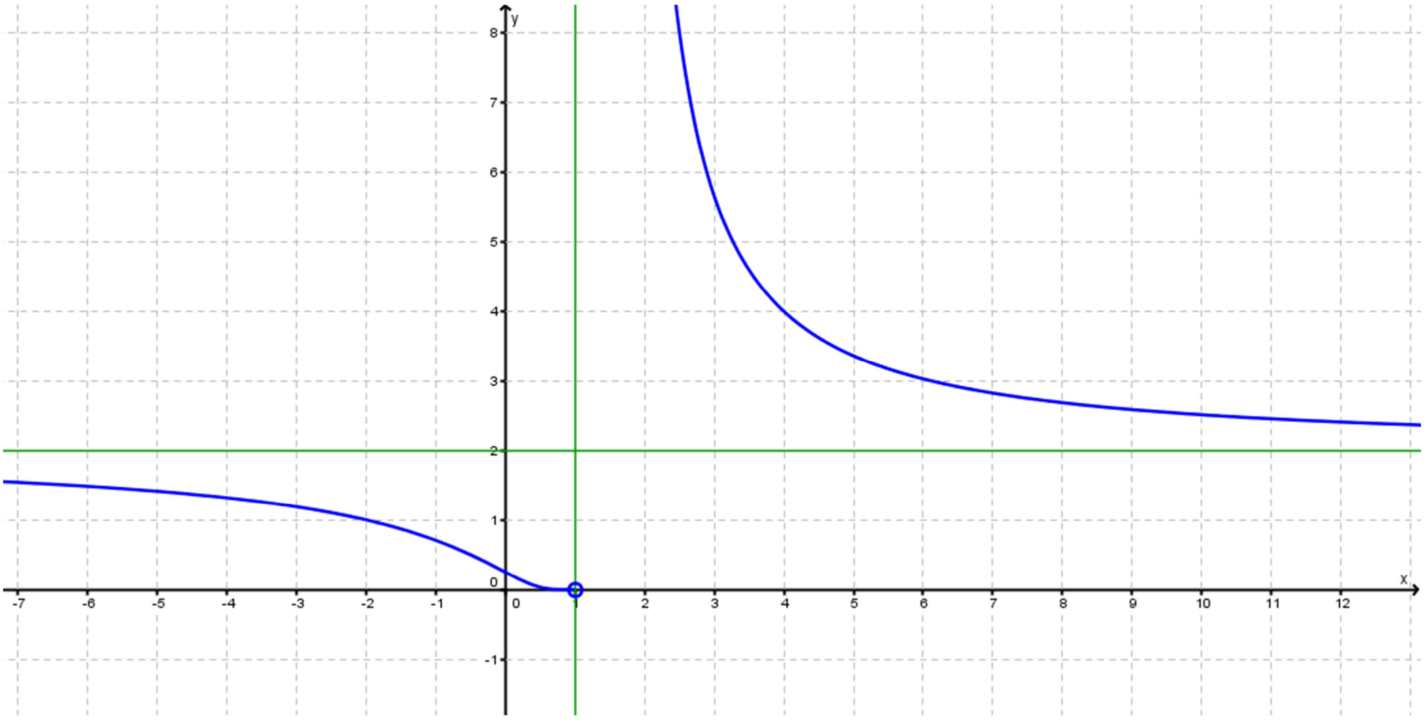
Determino gli eventuali asintoti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{x+2}{x-1}} = 2^{\pm} \qquad \boldsymbol{y = 2}\ \textit{asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2^{\frac{x+2}{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} 2^{\frac{x+2}{x-1}} = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 1}\ \textit{asintoto verticale (a destra)}$$

Il grafico della funzione è:



Date le seguenti funzioni, individua i loro punti di discontinuità e la relativa specie:

7. $y = \frac{x^3-2x^2+2x-4}{x-2}$

Determino innanzi tutto il dominio: $x \neq 2$. Calcolo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^3-2x^2+2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^2(x-2)+2\,(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{(x^2+2)(x-2)}{x-2} \lim_{x\to 2^\pm}(x^2+2) = 6$$

Ma non esiste la funzione nel punto 2, escluso dal dominio, perciò $x = 2$ è un punto di discontinuità di **terza specie**.

8. $y = \frac{5}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$

Determino innanzi tutto il dominio:

$$x \neq 1$$

$$1-2^{\frac{x}{x-1}} \neq 0 \qquad 2^{\frac{x}{x-1}} \neq 2^0 \qquad \frac{x}{x-1} \neq 0 \qquad x \neq 0$$

Calcolo i limiti destro e sinistro per entrambi i valori:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{5}{1-2^{\frac{x}{x-1}}} = 0 \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{5}{1-2^{\frac{x}{x-1}}} = 5$$

$x = 1$ è un punto di discontinuità di **prima specie**.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5}{1-2^{\frac{x}{x-1}}} = -\infty$$

$x = 0$ è un punto di discontinuità di **seconda specie**.