1. La posizione di un oggetto che si muove in linea retta è data dall'espressione $x = 3t - 4t^2 + t^3$, ove x è misurato in metri e t in secondi.
   A. Calcola lo spostamento dell'oggetto nell'intervallo di tempo tra $t = 0\ s$ e $t = 4\ s$.
   B. Calcola la velocità media nell'intervallo di tempo tra $t = 2\ s$ e $t = 4\ s$.

A. Lo spostamento tra 0 s e 4 s è dato da:

$$\Delta s = x(4\ s) - x(0\ s) = (3 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 + 4^3)\ m - (3 \cdot 0 - 4 \cdot 0^2 + 0^3)\ m = \mathbf{12\ m}$$

B. Per la velocità media, calcolo il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{x(4\ s) - x(2\ s)}{4\ s - 2\ s} = \frac{(3 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 + 4^3)\ m - (3 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 2^3)\ m}{2\ s} = \frac{12\ m + 2\ m}{2\ s} = \mathbf{7\ m/s}$$

2. Si lascia cadere una pietra da un dirupo alto 100 m. Quanto tempo impiega nella caduta
   A. per percorrere i primi 50 m?
   B. per percorrere i restanti 50 m?

$$v_o = 0\ m/s \qquad a = g \qquad s_o = 0\ m \qquad s_1 = 50\ m \qquad \Delta t_1? \qquad s_2 = 100\ m \qquad \Delta t_2?$$

Considero un sistema di riferimento solidale con il moto, diretto verso il basso (in modo che l'accelerazione coincida con l'accelerazione di gravità e sia positiva), con origine nel punto di partenza della pietra (e quindi il punto di arrivo si trova in posizione 100 m). Con t_2 ho indicato il tempo necessario per percorrere i successivi 50 m.

A. Parto dalla legge oraria della posizione in funzione del tempo: $s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$. Sostituendo i dati, ottengo: $s = \frac{1}{2}gt^2$.

Posso determinare, con la formula inversa, il tempo impiegato per percorrere i primi 50 m: $\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \mathbf{3,2\ s}$

B. Per determinare il tempo impiegato a percorrere i restanti 50 m, determino il tempo di volo dell'intero percorso e sottraggo il tempo impiegato a percorrere il primo tratto. Mi aspetto che, aumentando la velocità, il secondo intervallo di tempo sia più breve.

$$\Delta t_v = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} \qquad \Delta t_2 = \Delta t_v - \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} - \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \mathbf{1,3\ s}$$

3. Un cavallo può accelerare da 0 a 60 km/h in 5,4 s.
   A. Calcola l'accelerazione media in m/s^2.
   Assumi che l'accelerazione sia costante.
   B. Quale distanza percorre in 5,4 s?
   Ipotizza che il cavallo mantenga la stessa accelerazione.
   C. Quanto impiegherebbe a percorrere 250 m?
   D. Quale velocità raggiungerebbe?

$$v_o = 0\ m/s \qquad v = 60\ km/h \qquad \Delta t_1 = 5{,}4\ s \qquad a_m? \qquad \Delta s_1? \qquad s_2 = 250\ m \qquad \Delta t_2? \qquad v_2?$$

A. Determino l'accelerazione media applicando la definizione: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{\Delta t_1} = \mathbf{3,1\ m/s^2}$.

B. Assumendo costante l'accelerazione, determino la distanza percorsa come area sottesa dal grafico v-t: $\Delta s_1 = \frac{v_o + v}{2} \cdot \Delta t_1 = \mathbf{45\ m}$

C. Usando la legge oraria dello spazio in funzione del tempo, posso determinare il tempo impiegato: $s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{a_m}} = \mathbf{13\ s}$

D. Partendo dallo spazio percorso e conoscendo l'accelerazione media, determino la velocità finale:

$$s_2 = \frac{v_2^2 - v_o^2}{2\ a_m} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2a_m s_2} = \mathbf{39\ m/s}$$

4. Nell'istante in cui il semaforo diventa verde, un'auto parte con accelerazione costante di $2{,}2\ m/s^2$ mentre viene sorpassata da un autocarro che sopraggiunge alla velocità costante di $9{,}5\ m/s$.
   A. A quale distanza dal semaforo l'auto sorpassa l'autocarro?
   B. Qual è la velocità dell'auto in quel momento?
   C. Se la velocità dell'autocarro aumenta del 20% di quanto aumenta in percentuale la velocità finale dell'auto?

$$v_{o_A} = 0\ m/s \qquad a = 2{,}2\ m/s^2 \qquad v_c = 9{,}5\ m/s \qquad s_A = s_C? \qquad v_A? \qquad v'_c = \frac{120}{100}\, v_c \qquad \frac{v'_A - v_A}{v_A}\%?$$

A. Scrivo le leggi orarie dei due moti, notando che l'auto procede con moto rettilineo uniformemente accelerato, mentre l'autocarro procede con moto rettilineo uniforme.

Auto: $s = \frac{1}{2}at^2$ Autocarro: $s = v_c t$

Per determinare la posizione in cui l'auto sorpassa l'autocarro, metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ s = v_c t \end{cases} \qquad \frac{1}{2}at^2 - v_c t = 0 \qquad t\left(\frac{1}{2}at - v_c\right) = 0 \qquad \begin{array}{l} t_1 = 0\ s \\ t_2 = \dfrac{2v_c}{a} \end{array}$$

Il primo risultato, $t_1 = 0\ s$, rappresenta il sorpasso dell'auto che avviene al semaforo.
Il secondo risultato è quello del sorpasso dell'autocarro. Sostituendo il valore del tempo in una delle due equazioni del moto, ottengo la posizione:

$$s_A = s_c = v_c \frac{2v_c}{a} = 2\frac{v_c^2}{a} = \mathbf{82\ m}$$

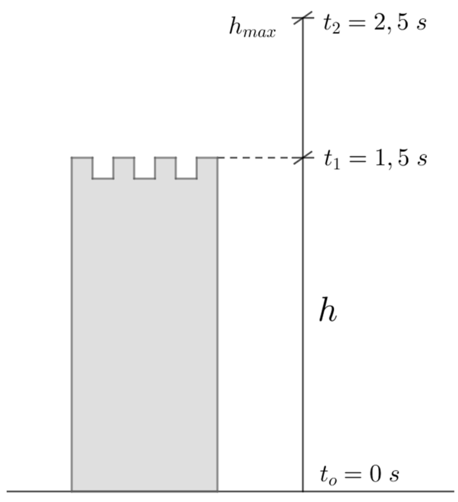
B. Determino la velocità dell'auto, sostituendo il tempo t_2 nella legge della velocità:

$$v = v_o + at \quad \Rightarrow \quad v = a\frac{2v_c}{a} = 2v_c = \mathbf{19\ m/s}$$

C. Visto che la velocità dell'auto è direttamente proporzionale alla velocità dell'autocarro, se la velocità dell'autocarro aumenta del 20% anche quella dell'auto aumenta del **20%**.

5. Un sasso è lanciato verticalmente verso l'alto dal livello del suolo all'istante $t = 0\ s$. Dopo $1{,}5\ s$ passa dalla sommità di una torre e raggiunge la sua massima altezza $1{,}0\ s$ ancora più tardi. Quanto è alta la torre?

$$t = 0\ s \qquad t_1 = 1{,}5\ s \qquad t_2 = 2{,}5\ s \qquad a = g \qquad h?$$



Vista la simmetria del moto nel lancio di un oggetto verso l'alto, posso considerare il moto di caduta che segue questa salita: ripartendo dall'altezza massima, il sasso impiegherà $1{,}0\ s$ per raggiungere la sommità della torre e $1{,}5\ s$ per raggiungere il pavimento, perciò:

$$h = s(t_2) - s(t_2 - t_1)$$

Lo spazio percorso si determina applicando la legge oraria dello spazio del moto rettilineo uniforme, considerando un sistema di riferimento rivolto verso il basso (per questo motivo nei dati ho riportato $a = g$):

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2 = \mathbf{26\ m}$$