1. Un momento torcente di 0,97 N m è applicato alla ruota di una bicicletta di massa 0,75 kg, generando un'accelerazione angolare di 11 rad/s². Trattando la ruota come se fosse un anello, determina il suo raggio.

La seconda legge di Newton per il moto rotazionale è:

$$M = I\alpha \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{M}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad mr^2 = \frac{M}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{M}{\alpha\, m}} = \sqrt{\frac{0{,}97\ kg\ m^2/s^2}{11\ rad/s^2 \cdot 0{,}75\ kg}} = \mathbf{0,34\ m}$$

2. Quando viene premuto il tasto "play", un CD accelera uniformemente da fermo a 450 giri/min. Se il CD ha raggio 6,0 cm e massa 17 g e se il momento torcente esercitato su di esso è 0,0018 Nm, in quanto tempo raggiunge la velocità finale? E quanti giri percorre nella fase di accelerazione?

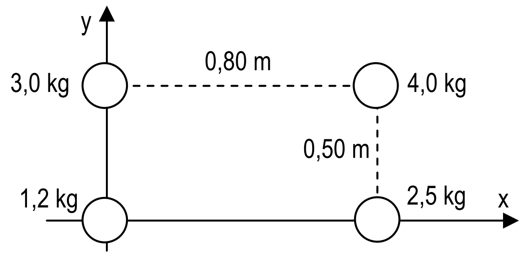
La seconda legge di Newton per il moto rotazionale è:

$$M = I\alpha = I\frac{\omega - \omega_o}{t} \quad \Longrightarrow \quad t = I\,\frac{\omega - \omega_o}{M} = \frac{mr^2\omega}{2M} = \mathbf{0,80\ s}$$

Applicando le leggi del moto angolare, posso ricavare lo spazio percorso:

$$\vartheta = \frac{\omega + \omega_o}{2}t = \frac{450\ \frac{giri}{60\ s}}{2} \cdot 0{,}80\ s = \mathbf{3,0\ giri}$$

3. Un momento torcente di 12 Nm viene applicato all'oggetto di forma rettangolare disegnato nella figura in alto. Il momento può essere applicato rispetto all'asse x, all'asse y o all'asse z, che passa per l'origine ed è perpendicolare al piano della pagina. In quale caso l'oggetto subisce la minore accelerazione angolare? Giustifica la tua risposta.
Calcola l'accelerazione angolare nei tre casi.



Il momento torcente è lo stesso ei tre casi, quindi l'accelerazione angolare è maggiore (minore) quando il momento d'inerzia ha il valore minore (maggiore). Il momento d'inerzia ha il valore maggiore quando il momento è applicato rispetto all'asse z, perciò l'accelerazione angolare in questo caso è maggiore:

$$\alpha_x = \frac{M}{I_x} = \frac{12\ N\ m}{3{,}0\ kg\ \cdot (0{,}50\ m)^2 + 4{,}0\ kg\ \cdot (0{,}50\ m)^2} = \mathbf{6,9\ rad/s^2}$$

$$\alpha_y = \frac{M}{I_y} = \frac{12\ N\ m}{4{,}0\ kg\ \cdot (0{,}80\ m)^2 + 2{,}5\ kg\ \cdot (0{,}80\ m)^2} = \mathbf{2,9\ rad/s^2}$$

$$\alpha_z = \frac{M}{I_z} = \frac{12\ N\ m}{3{,}0\ kg\ \cdot (0{,}50\ m)^2 + 4{,}0\ kg\ \cdot [(0{,}50\ m)^2 + (0{,}80\ m)^2] + 2{,}5\ kg\ \cdot (0{,}80\ m)^2} = \mathbf{2,0\ rad/s^2}$$

4. A una ruota di massa m e raggio r viene impressa una velocità angolare iniziale ω. Se, mantenendo costante il momento torcente e la velocità iniziale, raddoppiamo il raggio e dimezziamo la massa, lo spostamento angolare che la ruota compie prima di fermarsi è maggiore, minore o uguale? Dopo aver giustificato la tua risposta, determina il rapporto tra i due spostamenti angolari.

Il momento d'inerzia è direttamente proporzionale alla massa m e al quadrato del raggio r.

L'accelerazione angolare è inversamente proporzionale al momento d'inerzia e perciò inversamente proporzionale alla massa m e al quadrato del raggio r della ruota. In altre parole:

$$\alpha_2 \propto \frac{1}{m_2 r_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{2} m_1 (2r_1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m_1 r_1^2} = \frac{1}{2} \alpha_1$$

Visto che l'accelerazione angolare diminuisce, la ruota impiega più tempo a fermarsi, perciò lo spostamento angolare è maggiore.
Infatti:

$$\vartheta_2 = \frac{0 - \omega^2}{2\,\alpha_2} = \frac{-\omega^2}{2\,\frac{1}{2}\alpha_1} = 2 \cdot \frac{-\omega^2}{2\,\alpha_1} = 2\vartheta_1$$

$$\boldsymbol{\vartheta_2 = 2\vartheta_1}$$

5. Un cilindro e una sfera rotolano su un piano inclinato alto 0,75 m. La massa del cilindro è 2,0 kg, quella della sfera è 2,5 kg; il raggio della sfera è uguale al raggio di base del cilindro. Calcola per entrambi gli oggetti l'energia cinetica totale, quella traslazionale e quella rotazionale.

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia potenziale iniziale è uguale all'energia cinetica finale, perciò:

$$K = mgh$$

E nel caso della sfera: $K = m_S gh = 2{,}5\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 0{,}75\ m = \mathbf{18\ J}$

Mentre nel caso del cilindro: $K = m_C gh = 2{,}0\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 0{,}75\ m = \mathbf{15\ J}$

A questo punto, considerando innanzi tutto il caso della sfera, so che l'energia cinetica totale – che ho appena determinato – è data dalla somma dell'energia cinetica traslazionale e dell'energia cinetica rotazionale, perciò, sfruttando il momento d'inerzia della sfera piena, ottengo:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad mv^2 = \frac{10}{7}K$$

$$K_T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7}K = \frac{5}{7}K = \mathbf{13\ J}$$

$$K_r = K - K_T = K - \frac{5}{7}K = \frac{2}{7}K = \mathbf{5{,}3\ J}$$

Procedo nello stesso modo nel caso del cilindro:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad mv^2 = \frac{4}{3}K$$

$$K_T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}K = \frac{2}{3}K = \mathbf{9{,}8\ J}$$

$$K_r = K - K_T = K - \frac{2}{3}K = \frac{1}{3}K = \mathbf{4{,}9\ J}$$

6. Una ventola elettrica ha un'energia cinetica di 4,6 J. Se il suo momento di inerzia è 0,054 kg m², qual è la sua velocità angolare?

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{2K}{I}}=\mathbf{13\ rad/s}$$

7. Quando sei a riposo, il tuo cuore pompa il sangue con una portata di 5,00 litri al minuto. Calcola il volume (in m³) e la massa di sangue pompato dal cuore in un giorno (densità del sangue 1,06 g/cm³).

Innanzi tutto, servono le seguenti equivalenze:

$$1{,}06\,\frac{g}{cm^3}=\frac{1{,}06\cdot 10^{-3}kg}{10^{-6}m^3}=1{,}06\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$$
$$1L=1\,dm^3=10^{-3}m^3$$

Per la definizione di portata:

$$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad V=Q\Delta t=\frac{5{,}00\cdot 10^{-3}\,m^3}{60\,s}\cdot 86400\,s=\mathbf{7{,}20\,m^3}$$

Dalla definizione di densità:

$$\rho=\frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m=\rho V=1{,}06\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}\cdot 7{,}2\,m^3=\mathbf{7{,}63\cdot 10^3\,kg}$$

8. Un tubo orizzontale contiene acqua a una pressione di 110 kPa che scorre con una velocità di 1,6 m/s. Se, a un certo punto, il diametro del tubo si riduce della metà, qual è la velocità dell'acqua nella parte di tubo di sezione minore? Qual è la pressione dell'acqua nella parte di tubo di sezione minore?

Per l'equazione di continuità:

$$A_1v_1=A_2v_2 \quad \Rightarrow \quad \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 v_1=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=v_1\left(\frac{d_1}{\frac{1}{2}d_1}\right)^2=4v_1=\mathbf{6{,}4\,m/s}$$

Dall'equazione di Bernoulli:

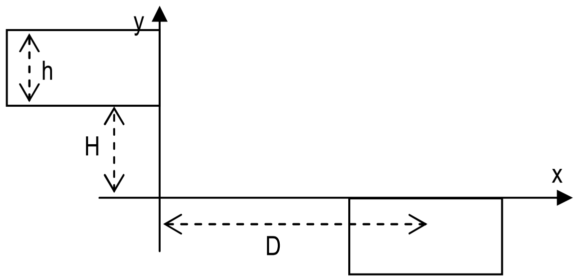
$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_2=p_1+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2)=p_1-\frac{15}{2}\rho v_1^2=\mathbf{91\,kPa}$$

9. L'aorta ha un diametro interno di circa 0,5 cm, mentre il diametro di un capillare è di circa 10 μm. Inoltre la velocità media del flusso sanguigno è approssimativamente 1,0 m/s nell'aorta e i capillari sono circa 25 milioni. Assumendo che tutto il sangue che fluisce attraverso l'aorta fluisca anche attraverso i capillari, qual è la velocità media del flusso sanguigno nei capillari?

Per l'equazione di continuità:

$$A_1v_1=nA_2v_2 \quad \Rightarrow \quad \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 v_1=n\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2=\frac{v_1}{n}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=\mathbf{1\,cm/s}$$

10. Un giardiniere vuole progettare una fontana nella quale uno zampillo d'acqua esca dal fondo di un serbatoio e cada in un secondo serbatoio. La superficie superiore del secondo serbatoio si trova a un'altezza H al di sotto del foro praticato nel primo serbatoio, che è riempito d'acqua per una profondità di altezza h. Il secondo serbatoio viene sistemato a una distanza D, a destra del primo serbatoio, in modo che l'acqua vi cada dentro. A quale altezza H deve essere posto il primo serbatoio per far sì che la distanza D sia 0,655 m, supponendo che l'altezza del liquido nel primo serbatoio sia di 0,150 m?



Per la legge di Torricelli, la velocità di fuoriuscita dell'acqua è:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Trattandosi di un moto parabolico, le equazioni sono:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Mettendo a sistema la seconda equazione, quella che si riferisce al moto verticale – uniformemente accelerato – con l'altezza 0, ovvero l'altezza raggiunta al momento in cui l'acqua entra nel secondo serbatoio, otteniamo il tempo di caduta:

$$H - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Sostituendo, nella prima equazione del moto, il tempo e la velocità (per la legge di Torricelli), otteniamo la lunghezza D, ovvero la gittata:

$$D = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\sqrt{hH} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{D^2}{4h} = \mathbf{0,715\ m}$$

11. Due sfere hanno lo stesso raggio e la stessa massa. In che modo puoi stabilire quale delle due sfere è piena e quale è cava?

Due le possibili risposte:

- Posso far ruotare le due sfere con uguale velocità angolare: quella con il momento d'inerzia maggiore – la sfera cava – possiede la maggiore energia cinetica, quindi girerà per un tempo più lungo prima di fermarsi.
- Posso lasciar scendere le due sfere dalla sommità di un piano inclinato: quella con il momento d'inerzia minore – la sfera piena – può raggiungere una maggiore velocità, perciò arriverà prima alla base del piano inclinato.

12. È meglio per un aeroplano decollare contro vento o in direzione del vento? Giustifica la risposta.

La situazione preferibile è quella di decollo contro vento, infatti in questo caso la velocità dell'aria sulle ali è maggiore rispetto a caso in cui si decolla nella direzione del vento e quindi la forza di sollevamento (ovvero la portanza) è maggiore.

13. Lo strato d'acqua di una cascata è più spesso in alto che non in basso. Analogamente, il getto d'acqua che esce da un rubinetto si restringe mentre cade. Perché?

Mentre cade, l'acqua aumenta la propria velocità (è infatti protagonista di un moto di caduta, uniformemente accelerato), perciò, per l'equazione di continuità, diminuisce l'area della sezione, considerato che la quantità di acqua che passa da un determinato punto in un certo intervallo di tempo è la stessa a qualsiasi altezza.