1. Studia il fascio di circonferenze di equazione: $x^2+y^2+x\,(k-2)+2y\,(k+2)-20-2k=0$

Determino innanzi tutto le coordinate generiche del centro della circonferenza e il raggio, per verificarne poi la condizione di realtà:

$$\boldsymbol{C\left(\frac{2-k}{2};\ -k-2\right)} \qquad r=\sqrt{\frac{4-4k+k^2}{4}+k^2+4k+4+20+2k}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{k^2+4k+20}}$$

Condizione di realtà:

$$k^2+4k+20\geq 0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4-20<0 \qquad \forall \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$$

Trovo le due circonferenze generatrici:

$$x^2+y^2+kx-2x+2ky+4y-20-2k=0 \qquad x^2+y^2-2x+4y-20+k\,(x+2y-2)=0$$

La prima generatrice è una circonferenza: $\boldsymbol{x^2+y^2-2x+4y-20=0}$ di centro $C(1;\ -2)$ e raggio $r=5$.

La seconda è una circonferenza degenere, l'asse radicale: $\boldsymbol{x+2y-2=0}$.

Determino le coordinate degli eventuali punti di intersezione per stabilire di che tipo sia il fascio:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-20=0 \\ x=-2y+2 \end{cases} \qquad 4y^2+4-8y+y^2+4y-4+4y-20=0$$

$$5y^2-20=0 \qquad y^2=4 \qquad y=\pm 2$$

I due punti di intersezione hanno coordinate: $\boldsymbol{A\,(-2;2)}$ $\boldsymbol{B\,(6;\ -2)}$

Si tratta quindi di un fascio di circonferenze **secanti**.

Determino l'equazione dell'asse centrale, che coincide con la retta perpendicolare all'asse radicale e passante per il centro della circonferenza generatrice:

$$y+2=2\,(x-1) \qquad \boldsymbol{2x-y-4=0}$$

Nel caso di un fascio di circonferenze secanti, l'unica circonferenza degenere è l'asse radicale, già determinato.

2. Sia data la circonferenza con centro sulla retta $5x + y - 10 = 0$ e tangente in $(-1;\ -2)$ alla retta $4x - 3y - 2 = 0$. Considerata la tangente t alla circonferenza nel suo punto di ordinata -2 del quarto quadrante, traccia la perpendicolare a t passante per il suo punto di intersezione con l'asse x e calcola l'area del triangolo formato dalle due rette con l'asse y.

Per determinare l'equazione della circonferenza, trovo innanzi tutto l'equazione del fascio di circonferenze tangente nel punto dato alla retta data, facendo la combinazione lineare della circonferenza degenere con centro nel punto e raggio nullo e della circonferenza degenere data dall'asse radicale, ovvero la retta tangente:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + k\,(4x - 3y - 2) = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x\,(2k+1) + y\,(4 - 3k) + 5 - 2k = 0$$

A questo punto determino le coordinate generiche del centro e, sapendo che il centro della circonferenza si trova sulla retta data dal testo, sotituisco le coordinate generiche nell'equazione per determinare il parametro:

$$C\left(-2k - 1; \frac{3k-4}{2}\right) \qquad 5\,(-2k-1) + \frac{3k-4}{2} - 10 = 0$$
$$-20k - 10 + 3k - 4 - 20 = 0 \qquad -17k = 34 \qquad k = -2$$

Sostituendo il parametro così determinato nell'equazione del fascio, troviamo la circonferenza richiesta:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0}$$

Determino le coordinate del punto di ordinata – 2 del quarto quadrante, sostituendo l'ordinata nell'equazione della circonferenza e scegliendo, tra le soluzioni, quella positiva:

$$x^2 + 4 - 6x - 20 + 9 = 0 \qquad x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+7}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

Il punto richiesto ha coordinate: $A\ (7;\ -2)$.
Per determinare l'equazione della tangente t in A alla circonferenza, uso la formula di sdoppiamento:

$$xx_A + yy_A + a\frac{x + x_A}{2} + b\frac{y + y_A}{2} + c = 0$$
$$7x - 2y - 6\frac{x+7}{2} + 10\frac{y-2}{2} + 9 = 0 \qquad \boldsymbol{t\!:\ 4x + 3y - 22 = 0}$$

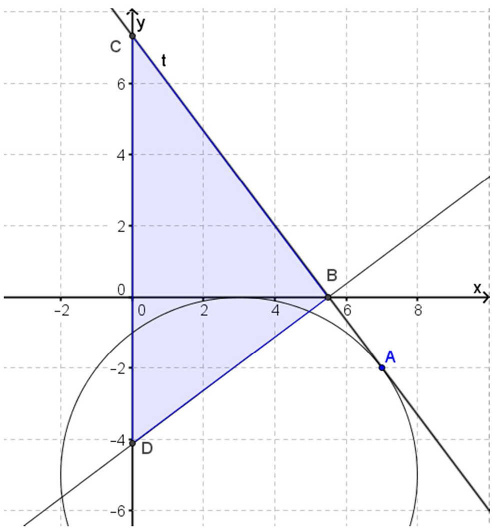
Determino le coordinate dell'interesezione della retta t con l'asse x:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 22 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad B\left(\frac{11}{2}; 0\right)$$

Determino la retta perpendicolare a t passante per B:

$$y - 0 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{11}{2}\right) \qquad y = \frac{3}{4}x - \frac{33}{8}$$

Le coordinate del punto di intersezione di questa retta con l'asse y sono date dall'ordinata all'origine, perciò: $D\left(0;\ -\frac{33}{8}\right)$, come quelle della retta t con l'asse y: $C\left(0; \frac{22}{3}\right)$. Per determinare l'area del triangolo richiesto (indicato nella figura a lato), calcolo la lunghezza del segmento CD, conosco l'altezza BO, data dall'ascissa di B e determino quindi l'area:



$$\overline{CD} = \frac{22}{3} + \frac{33}{8} = \frac{176 + 99}{24} = \frac{275}{24} \qquad \overline{BO} = \frac{11}{2}$$

$$A = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{BO}}{2} = \frac{275}{24} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3025}{96}}$$

3. Dato il triangolo di vertici $A\ (4;\ -3)$, $B\ (6; -1)$ e $D\ (4; 5)$, determina:

A. l'equazione della circonferenza circoscritta;
B. le equazioni delle tangenti alla circonferenza parallele al raggio passante per A;
C. le coordinate dei punti E ed F, intersezione tra le tangenti e la circonferenza;
D. l'area del quadrilatero FBED.

A. Per determinare l'equazione della circonferenza circoscritta, individuo le equazioni degli assi delle corde AD e AB:

$$a_{AB}: (x-4)^2 + (y+3)^2 = (x-6)^2 + (y+1)^2$$

$$-8x + 16 + 6y + 9 = -12x + 36 + 2y + 1 \qquad\qquad x + y - 3 = 0$$

$$a_{AD}: (x-4)^2 + (y+3)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2$$

$$6y + 9 = -10\,y + 25 \qquad\qquad y - 1 = 0$$

Mettendo a sistema le equazioni dei due assi, trovo le coordinate del centro della circonferenza richiesta:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \qquad\qquad C\ (2;\ 1)$$

Posso ora trovare l'equazione della circonferenza di centro C e raggio AC:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 + 4^2 \qquad\qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0}$$

B. Determino innanzi tutto il coefficiente angolare del raggio AC:

$$m_{AC} = \frac{1+3}{2-4} = -2$$

Ora considero il fascio di rette parallele, di coefficiente angolare – 2, e pongo la distanza dal centro uguale al raggio della circonferenza, per poter trovare le due rette tangenti alla circonferenza richieste:

$$t:\ 2x + y + q = 0 \qquad\qquad d\ (t; C) = \frac{|4 + 1 + q|}{\sqrt{5}} = r = 2\sqrt{5}$$

$$|q + 5| = 10 \qquad \begin{matrix} q_1 = 5 \\ q_2 = -15 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} t_1: 2x + y + 5 = 0 \\ t_2: 2x + y - 15 = 0 \end{matrix}$$

C. Per determinare le coordinate di E ed F, metto a sistema l'equazione della circonferenza con le equazioni delle tangenti:

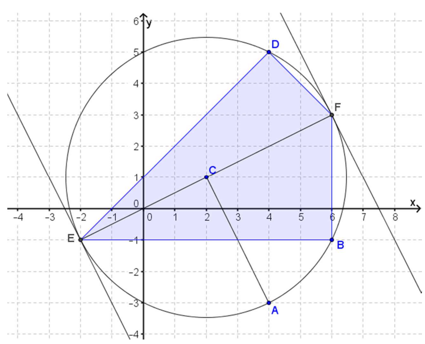
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0 \\ y = -2x - 5 \end{cases} \qquad\qquad x^2 + 4x^2 + 25 + 20x - 4x + 4x + 10 - 15 = 0$$

$$x^2 + 4\,x + 4 = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{E\ (-2;\ -1)}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0 \\ y = -2x + 15 \end{cases} \qquad\qquad x^2 + 4x^2 + 225 - 60x - 4x + 4x - 30 - 15 = 0$$

$$x^2 - 12\,x + 36 = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{F\ (6;\ 3)}$$

D. Per determinare l'area del quadrilatero EBFD, considero innanzi tutto che esso è formato da due triangoli rettangoli, EBF e EFD. Infatti, considero il raggio CF e so che è perpendicolare alla tangente in F. Allo stesso modo, il raggio CE è perpendicolare alla tangente in E. Ma le due tangenti, per costruzione, sono parallele, perciò i tre punti E, C ed F sono allineati e da questo discende che EFD e EBF sono triangoli rettangoli, in quanto inscritti in una semicirconferenza.



$$\overline{EB} = 8 \qquad \overline{BF} = 4 \qquad A_{EBF} = \frac{\overline{EB} \cdot \overline{BF}}{2} = 16$$

$$\overline{ED} = 6\sqrt{2} \qquad \overline{DF} = 2\sqrt{2} \qquad A_{EBF} = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{DF}}{2} = 12$$

L'area totale richiesta (ottenuta sommando le due aree) è **28**.