

1. Calcola i seguenti limiti:

$$A. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

$$B. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - \sqrt{5x+6}}{x^2 - 8x + 12} \cdot \frac{4 + \sqrt{5x+6}}{4 + \sqrt{5x+6}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{16 - 5x - 6}{(x^2 - 8x + 12)(4 + \sqrt{5x+6})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5(x-2)}{(x-2)(x-6)(4 + \sqrt{5x+6})} = \frac{-5}{-4 \cdot 8} = \frac{5}{32}$$

$$C. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\cot x}\right)^{\cot x} = e$$

$$D. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1 - (e^{\sin x} - 1)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (2 \cos x - 1)}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x (2 \cos x - 1) = 1$$

$$E. \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(3x+1) - \ln x - \ln 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{3x+1}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[ \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$F. \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} (e+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x}} (e+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{e}x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left(1 + \frac{2}{e}x\right)^{\frac{e}{2x}} \right]^{\frac{2}{e}} = e^{\frac{2}{e}}$$

$$G. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln^2 x}{4 - \ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{-\ln^2 x} = -1$$

$$H. \lim_{x \rightarrow -1} (x+2)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x+1}}\right)^{\frac{1}{x+1}} \right]^2 = e^2$$

$$I. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{\frac{x}{3}} = \frac{2x+1}{2x-4} = 1 + \frac{1}{y} \quad \frac{2x+1-2x+4}{2x-4} = \frac{1}{y} \quad y = \frac{2x-4}{5} \quad x = \frac{5y+4}{2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{5y+2}{3}} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left\{ \left[ \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^{\frac{5}{6}} \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \right\} = e^{\frac{5}{6}}$$

$$J. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{(x-4)^2}} = 0$$

2. Sia data la funzione:  $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x \sin x}{e^{x^2} - 1} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ . Stabilisci se è continua nel punto  $x = 0$ .

Se verifichiamo che:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{e^{x^2} - 1} = f(0)$ , allora la funzione è continua.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + 2x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad f(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

Possiamo quindi concludere che la funzione è **continua nel punto  $x = 0$** .

3. Per quali valori dei parametri  $a$  e  $b$ , la curva  $y = \frac{ax^2+3x}{bx+1}$  ammette asintoto obliquo di equazione  $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{9}$ .

Perché la funzione ammetta asintoto obliquo, deve verificarsi che:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2+3x}{bx+1} = \pm\infty$  e questo avviene se  $a \neq 0$ .

Calcolo quindi il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo, ponendolo uguale a  $\frac{4}{3} = m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2+3x}{bx^2+x} = \frac{a}{b}$ , perciò  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ .

Inoltre:  $q = \frac{5}{9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{ax^2+3x}{bx+1} - \frac{a}{b}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{abx^2+3bx-abx^2-ax}{b(bx+1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(-a+3b)x}{b^2x} = \frac{-a+3b}{b^2}$ . Otteniamo, quindi, il sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ \frac{-a+3b}{b^2} = \frac{5}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ 9\left(-\frac{4}{3}b + 3b\right) = 5b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ 15b = 5b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{escludendo la soluzione } a = b = 0.$$

4. Considera la famiglia di funzioni  $f(x) = ax + b + \frac{x^2}{x+1}$ , con  $a$  e  $b$  parametri reali.

A. Trova per quali valori dei parametri si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  e disegna il grafico della funzione per i valori trovati.

B. Considera un punto  $P$  appartenente all'arco del grafico di  $f(x)$ , con  $x > -1$ , chiama  $Q$  il punto in cui la parallela all'asse  $y$  per  $P$  interseca la retta  $y = -x + 2$  e  $A$  il punto in cui la funzione incontra l'asse  $y$ . Determina  $\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{PA}^2}$  al tendere di  $P$  ad  $A$  sulla curva.

A.  $f(x) = \frac{ax^2+ax+bx+b+x^2}{x+1} = \frac{(a+1)x^2+(a+b)x+b}{x+1}$ .

Perché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , il termine del numeratore moltiplicato per  $x^2$  deve essere nullo (altrimenti il limite avrebbe valore infinito), inoltre:

$$\begin{cases} a+1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+b)x+b}{x+1} = a+b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

B. La funzione ottenuta è quella omografica:  $y = \frac{x+2}{x+1}$  con asintoti  $x = -1$  (asintoto verticale) e  $y = 1$  (asintoto orizzontale). Il punto in cui incontra l'asse  $y$  ha coordinate  $A(0; 2)$ .

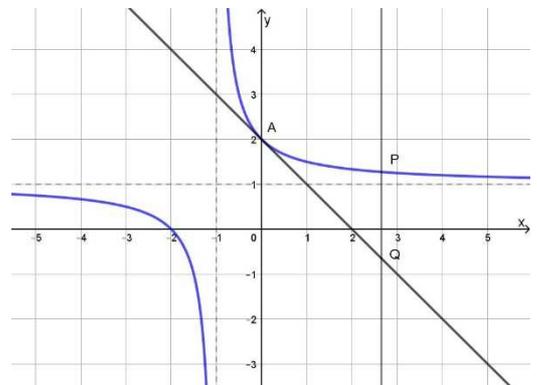
I punti richiesti hanno coordinate:

$$P\left(x; \frac{x+2}{x+1}\right) \quad Q(x; -x+2) \quad A(0; 2)$$

Possiamo, quindi, determinare le distanze richieste nel calcolo del limite:

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{x+2}{x+1} + x - 2\right)^2 = \left(\frac{x+2+x^2-x-2}{x+1}\right)^2 = \frac{x^4}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 &= x^2 + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x+2-2x-2}{x+1}\right)^2 = \\ &= x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2[(x+1)^2 + 1]}{(x+1)^2} \end{aligned}$$



Sostituendo, il limite diventa:

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{PA}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2[(x+1)^2 + 1]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x+1)^2 + 1} = 0$$

5. In un dato campione di persone, la percentuale di quelle che possiedono un certo bene è modellizzata dalla funzione  $p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$ , dove  $x$  è il tempo trascorso dal primo gennaio 2000, in anni, e  $p(x)$  è la percentuale di individui dotati del bene dopo  $x$  anni. Per esempio,  $p(0)$  è la percentuale relativa al primo gennaio 2000 e  $p(3,5)$  quella relativa a inizio luglio 2003.

- A. Calcola la percentuale degli individui che possiedono il bene al primo gennaio 2010. Arrotonda il risultato al centesimo.  
 B. Calcola  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$ , interpreta il risultato e disegna il grafico di  $p(x)$ .  
 C. Supponiamo che il mercato di questo bene sia saturo quando la percentuale di individui che lo possiedono supera il 95%. In quale anno diventa saturo?

A. Per determinare la percentuale al primo gennaio, dobbiamo sostituire 10 a  $x$ :  $p(10) = \frac{1}{1+e^{-2}} = 88,08\%$

B.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = 1$ .

Il risultato del limite corrisponde al 100%. Questo significa che, in un tempo sufficientemente lungo, TUTTI saranno dotati di quel bene.

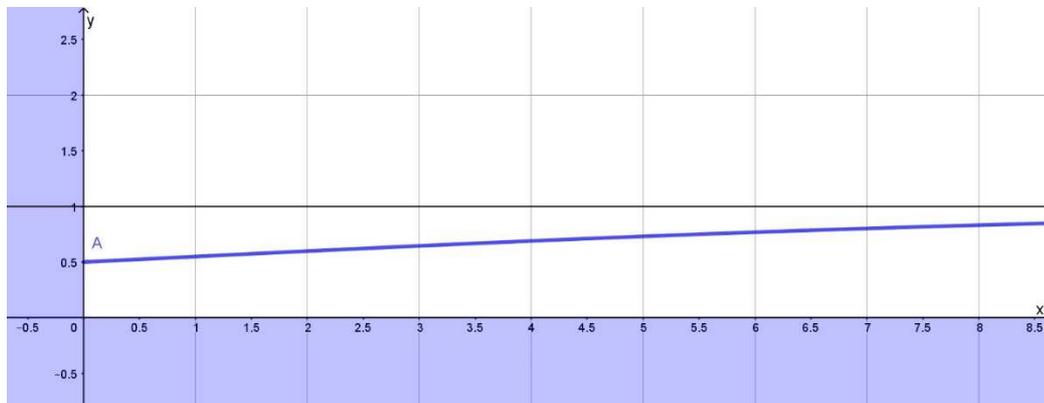
Dominio:  $D = [0; +\infty)$ , perché il bene ha cominciato a circolare al primo gennaio 2000.

Simmetria: la funzione non è né pari né dispari, visto che il dominio non è simmetrico.

La funzione è positiva per qualsiasi valore del dominio, visto che a denominatore c'è un esponenziale sommato a una quantità positiva.

Intersezioni con gli assi:  $\begin{cases} x = 0 \\ p(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ , mentre non ci sono intersezioni con l'asse  $x$ , visto che il numeratore della frazione non potrà essere nullo.

Sapendo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = 1$ ,  $y = 1$  è un asintoto orizzontale.



C. Determino  $x$  in maniera tale che  $p(x) = 0,95$ :

$$\frac{1}{1+e^{-0,2x}} = 0,95 \quad \frac{1}{0,95} = 1+e^{-0,2x} \quad e^{-0,2x} = \frac{1}{0,95} - 1$$

$$-0,2x = \ln\left(\frac{1}{0,95} - 1\right) \quad x = -\frac{1}{0,2} \ln\left(\frac{1}{0,95} - 1\right) = 14,7$$

Ovvero nel **2014**.