1. Calcola i seguenti limiti:

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-e^{\sin x}}{5+e^{-x}+\cos x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{e^{-x}}=\mathbf{0}$

B. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2-\sqrt{5x+14}}{x^2+8x+12}\cdot\frac{2+\sqrt{5x+14}}{2+\sqrt{5x+14}}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{4-5x-14}{(x^2+8x+12)(2+\sqrt{5x+14})}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{-5\,(x+2)}{(x+2)(x+6)(2+\sqrt{5x+14})}=\frac{-5}{4\cdot4}=-\mathbf{\frac{5}{16}}$

C. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{\tan x}\right)^{\tan x}=\boldsymbol{e}$

D. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-1-(e^{\sin x}-1)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\,(2\cos x-1)}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\,(2\cos x-1)=\mathbf{1}$

E. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,[\ln(5x+1)-\ln x-\ln 5]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{5x+1}{5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{\frac{1}{5}}=\mathbf{\frac{1}{5}}$

F. $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}(e+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x}}(e+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{e}x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(1+\frac{2}{e}x\right)^{\frac{e}{2x}}\right]^{\frac{2}{e}}=\boldsymbol{e^{\frac{2}{e}}}$

G. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\ln^2 x}{4-\ln^2 x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{-\ln^2 x}=\mathbf{-1}$

H. $\lim\limits_{x\to-1}(x+2)^{\frac{2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x+1}}\right)^{\frac{1}{x+1}}\right]^2=\boldsymbol{e^2}$

I. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{\frac{x}{3}}=$ $\quad\frac{2x+1}{2x-4}=1+\frac{1}{y}\quad\frac{2x+1-2x+4}{2x-4}=\frac{1}{y}\quad y=\frac{2x-4}{5}\quad x=\frac{5y+4}{2}$

$=\lim\limits_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{6}y+\frac{2}{3}}=\lim\limits_{y\to\pm\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{5}{6}}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}=\boldsymbol{e^{\frac{5}{6}}}$

J. $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{(x-4)^2}}=\mathbf{0}$

2. Sia data la funzione: $f(x)=\begin{cases}2+x & -1\le x\le 0\\ \frac{x\sin x}{e^{x^2}-1} & 0<x\le 1\end{cases}$. Stabilisci se è continua nel punto $x=0$.

Se verifichiamo che: $\lim\limits_{x\to0^-}(2+x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}=f(0)$, allora la funzione è continua.

$$\lim_{x\to0^-}(2+x)=2\qquad\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x^2}=1\qquad f(0)=2+0=2$$

Possiamo quindi concludere che la funzione **NON è continua nel punto $x=0$**.

3. Per quali valori dei parametri a e b, la curva $y = \frac{ax^2+3x}{bx+1}$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}$.

Perché la funzione ammetta asintoto obliquo, deve verificarsi che: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+3x}{bx+1} = \pm\infty$ e questo avviene se $a \neq 0$.

Calcolo quindi il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo, ponendolo uguale a $\frac{2}{3} = m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+3x}{bx^2+x} = \frac{a}{b}$, perciò $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

Inoltre: $q = \frac{7}{9} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{ax^2+3x}{bx+1} - \frac{a}{b}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ab\,x^2+3b\,x-ab\,x^2-ax}{b\,(bx+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(-a+3b)\,x}{b^2\,x} = \frac{-a+3b}{b^2}$. Otteniamo, quindi, il sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \\ \frac{-a+3b}{b^2} = \frac{7}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{2}{3}b \\ 9\left(-\frac{2}{3}b + 3b\right) = 7b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{2}{3}b \\ 21\,b = 7b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = 3} \end{cases}$$

escludendo la soluzione $a = b = 0$.

4. Considera la famiglia di funzioni $f(x) = ax + b + \frac{x^2}{x+1}$, con a e b parametri reali.

A. Trova per quali valori dei parametri si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e disegna il grafico della funzione per i valori trovati.

B. Considera un punto P appartenente all'arco del grafico di $f(x)$, con $x > -1$, chiama Q il punto in cui la parallela all'asse y per P interseca la retta $y = -x + 2$ e A il punto in cui la funzione incontra l'asse y. Determina $\lim_{P\to A} \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{PA}^2}$ al tendere di P ad A sulla curva.

A. $f(x) = \frac{ax^2+ax+bx+b+x^2}{x+1} = \frac{(a+1)\,x^2+(a+b)x+b}{x+1}$.

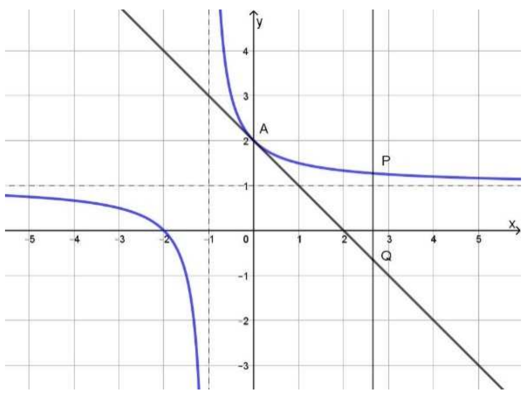
Perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, il termine del numeratore moltiplicato per x^2 deve essere nullo (altrimenti il limite avrebbe valore infinito), inoltre:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(a+b)x+b}{x+1} = a+b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = -1} \\ \boldsymbol{b = 2} \end{cases}$$

B. La funzione ottenuta è quella omografica: $y = \frac{x+2}{x+1}$ con asintoti $x = -1$ (asintoto verticale) e $y = 1$ (asintoto orizzontale). Il punto in cui incontra l'asse y ha coordinate $A\,(0;2)$.

I punti richiesti hanno coordinate:

$$P\left(x; \frac{x+2}{x+1}\right) \qquad Q\,(x;\ -x+2) \qquad A\,(0;2)$$



Possiamo, quindi, determinare le distanze richieste nel calcolo del limite:

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{x+2}{x+1} + x - 2\right)^2 = \left(\frac{x+2+x^2-x-2}{x+1}\right)^2 = \frac{x^4}{(x+1)^2}$$

$$\overline{PA}^2 = x^2 + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x+2-2x-2}{x+1}\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2\,[(x+1)^2+1]}{(x+1)^2}$$

Sostituendo, il limite diventa:

$$\lim_{P\to A} \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{PA}^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2\,[(x+1)^2+1]} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(x+1)^2+1} = \boldsymbol{0}$$

5. In un dato campione di persone, la percentuale di quelle che possiedono un certo bene è modellizzata dalla funzione $p(x)=\frac{1}{1+e^{-0,2\,x}}$, dove x è il tempo trascorso dal primo gennaio 2000, in anni, e $p(x)$ è la percentuale di individui dotati del bene dopo x anni. Per esempio, $p(0)$ è la percentuale relativa al primo gennaio 2000 e $p(3,5)$ quella relativa a inizio luglio 2003.
   A. Calcola la percentuale degli individui che possiedono il bene al primo gennaio 2010. Arrotonda il risultato al centesimo.
   B. Calcola $\lim_{x\to+\infty} p(x)$, interpreta il risultato e disegna il grafico di $p(x)$.
   C. Supponiamo che il mercato di questo bene sia saturo quando la percentuale di individui che lo possiedono supera il 95%. In quale anno diventa saturo?

A. Per determinare la percentuale al primo gennaio, dobbiamo sostituire 10 a x: $p(10)=\frac{1}{1+e^{-2}}=\mathbf{88,08\ \%}$

B. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-0,2\,x}}=1.$

Il risultato del limite corrisponde al 100%. Questo significa che, in un tempo sufficientemente lungo, TUTTI saranno dotati di quel bene.

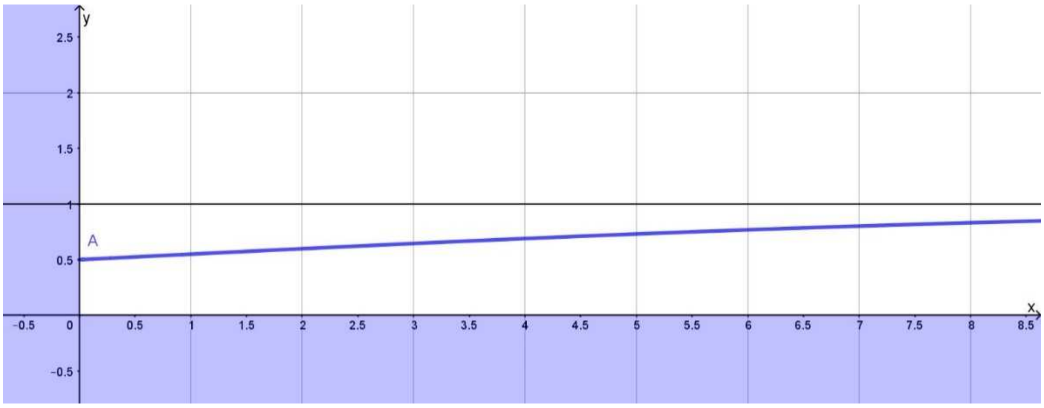
Dominio: $D=[0;\ +\infty)$, perché il bene ha cominciato a circolare al primo gennaio 2000.

Simmetria: la funzione non è né pari né dispari, visto che il dominio non è simmetrico.

La funzione è positiva per qualsiasi valore del dominio, visto che a denominatore c'è un esponenziale sommato a una quantità positiva.

Intersezioni con gli assi: $\begin{cases} x=0 \\ p(x)=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\quad A\left(0;\frac{1}{2}\right)$, mentre non ci sono intersezioni con l'asse x, visto che il numeratore della frazione non potrà essere nullo.

Sapendo che $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-0,2\,x}}=1$, $y=1$ è un asintoto orizzontale.



C. Determino x in maniera tale che $p(x)=0,95$:

$$\frac{1}{1+e^{-0,2\,x}}=0,95 \qquad \frac{1}{0,95}=1+e^{-0,2\,x} \qquad e^{-0,2\,x}=\frac{1}{0,95}-1$$

$$-0,2\,x=\ln\left(\frac{1}{0,95}-1\right) \qquad x=-\frac{1}{0,2}\ln\left(\frac{1}{0,95}-1\right)=14,7$$

Ovvero nel **2014**.