Semplifica le seguenti espressioni numeriche ed esprimi il risultato in modo che gli eventuali denominatori non contengano radicali

1. $\frac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\cdot\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}+2\right)^2-1\right]$

$$=\frac{7-1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\cdot\left[4+3+4\sqrt{3}-\left(2+4+4\sqrt{2}\right)-1\right]=\frac{6}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\cdot\left(6+4\sqrt{3}-6-4\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\left(4\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=3\cdot4=\mathbf{12}$$

2. $\frac{2\sqrt{15}+8\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+8}\cdot\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+3+\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}+2+\sqrt{21}+\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}\left(\sqrt{3}-1\right)$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+4\right)}{2\left(\sqrt{5}+4\right)}\cdot\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)}-\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2+\sqrt{7}}\left(\sqrt{3}-1\right)=$$

$$=2-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{7}\right)}{2+\sqrt{7}}\left(\sqrt{3}-1\right)=2-\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=2-(3-1)=2-2=\mathbf{0}$$

3. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-3}\right)\cdot\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-3}\cdot\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\frac{5-2\sqrt{3}}{13}=\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}+3}{6}\right)\cdot\frac{5-2\sqrt{3}}{13}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3}{6}\cdot\frac{5-2\sqrt{3}}{13}=\frac{5+2\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{5-2\sqrt{3}}{13}=\frac{25-12}{6\cdot13}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

4. $\left(\sqrt{\frac{125}{3}}:\sqrt{\frac{5}{27}}+\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}\right):\sqrt{98}$

$$=\left(\sqrt{\frac{125}{3}\cdot\frac{27}{5}}+\sqrt{\frac{20}{45}}+\sqrt{\frac{8}{18}}\right):\sqrt{98}=\left(\sqrt{25\cdot9}+\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{98}}=\left(15+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{49}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{14}=\mathbf{\frac{7}{6}\sqrt{2}}$$

Semplifica le seguenti espressioni letterali, ponendo le condizioni di esistenza e discutendo l'eventuale valore assoluto nel risultato:

5. $\sqrt{a^2-1}\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}\right)+\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}\right)$

$C.E.: a^2-1\geq0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a\leq-1} \quad\vee\quad \boldsymbol{a\geq1}$

$$=\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}\right)\left(\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2+1}\right)=a^2+1-(a^2-1)=a^2+1-a^2+1=\mathbf{2}$$

oppure: $=\sqrt{a^4-1}-(a^2-1)+a^2+1-\sqrt{a^4-1}=-a^2+1+a^2+1=\mathbf{2}$

6. $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}\right):\ \sqrt{x+1}$

$= \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2(x+1)}-\sqrt{(x+1)^3}\right):\sqrt{x+1} =$ $\qquad C.E.: x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1$

$= \dfrac{\sqrt{x+1}+|x|\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}(1+|x|-x-1)}{\sqrt{x+1}} = |x|-x =$ $\qquad Se -1<x<0: \ \boldsymbol{-2x}$ $\quad Se\ x\geq 0: \ \mathbf{0}$

7. $\sqrt{2-a}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^2-4}}\cdot\sqrt[6]{a+2}$

$C.E.: \begin{cases} 2-a\geq 0 \\ a^2-4\neq 0 \\ a+2\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leq 2 \\ a\neq\pm 2 \\ a\geq -2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{-2<a<2}$

$= \sqrt[6]{(2-a)^3}\cdot\dfrac{1}{-\sqrt[6]{(4-a^2)^2}}\cdot\sqrt[6]{a+2} = -\sqrt[6]{\dfrac{(2-a)^3\cdot(a+2)}{(2-a)^2(2+a)^2}} = -\sqrt[6]{\dfrac{\boldsymbol{2-a}}{\boldsymbol{2+a}}}$

Determina il dominio e il segno delle seguenti funzioni:

8. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$C.E.: \begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x-3)>0 \\ x>1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<2 \ \vee \ x>3 \\ x>1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{1<x<2 \ \vee \ x>3}$

Trattandosi di una somma di radicali che non possono mai essere nulli (avendo numeratore pari a 1), la funzione sarà sempre positiva, ovvero:

$\boldsymbol{y>0:\ \forall x\in D} \qquad \boldsymbol{y\leq 0:\ \nexists x\in D}$

9. $y=\sqrt[3]{\frac{x-3}{3x-5}}$

$C.E.: 3x-5\neq 0 \qquad \boldsymbol{x\neq\frac{5}{3}}$

Trattandosi di un radicale cubico, la funzione sarà positiva quando il radicando è positivo e negativa quando lo è il radicando, perciò studiamo il segno del radicando:

$\dfrac{x-3}{3x-5}>0 \qquad \begin{matrix} N>0:\ x>3 \\ D>0:\ x>\frac{5}{3} \end{matrix} \qquad x<\frac{5}{3} \ \vee \ x>3$

$\boldsymbol{y>0:\ x<\frac{5}{3} \ \vee \ x>3;} \qquad \boldsymbol{y=0:\ x=3;} \qquad \boldsymbol{y<0:\ \frac{5}{3}<x<3}$

10. $y=\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$

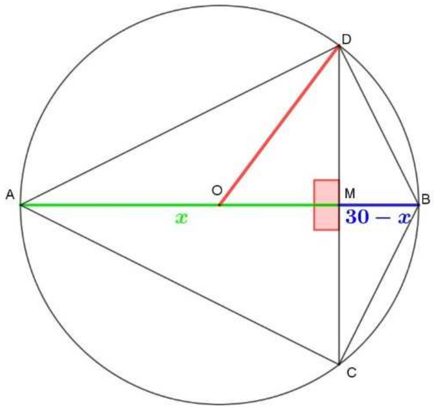
$C.E.:\ x^2-2x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 0 \ \wedge \ x\neq 2$

Per studiare il segno più facilmente, porto il numeratore dentro la radice: $y=2\sqrt[3]{\frac{x^3}{x(x-2)}}=2\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-2}}$

Si può, quindi, notare come il segno dipenda unicamente dal denominatore, visto che il numeratore è sempre positivo, perciò:

$\boldsymbol{y>0:\ x>2;} \qquad \boldsymbol{y=0:\ \nexists x\in D;} \qquad \boldsymbol{y<0:\ x<2 \ \wedge \ x\neq 0}$

11. In una circonferenza di diametro AB pari a 30, è data una corda CD che interseca il diametro nel proprio punto medio M. Sapendo che $\frac{3}{4}AM + \frac{1}{3}MB = 20$, determina l'area del quadrilatero ACBD. (Poni $AM = x$).



Avendo indicato il segmento AM con x, il segmento MB sarà pari a $30 - x$, essendo dato dalla differenza tra il diametro AB e il segmento AM.
Possiamo quindi tradurre la relazione data in un'equazione di primo grado:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}(30 - x) = 20$$

$$\frac{3}{4}x + 10 - \frac{1}{3}x = 20 \qquad \frac{5}{12}x = 10 \qquad x = 24$$

Dato che il diametro AB interseca la corda CD nel suo punto medio, il diametro è perpendicolare alla corda. Possiamo quindi determinare la lunghezza della corda, usando il teorema di Pitagora:

$$DM = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 - \left(24 - \frac{30}{2}\right)^2} = 12$$

Il quadrilatero ACBD è un deltoide, ovvero un quadrilatero con le diagonali perpendicolari. Possiamo quindi determinarne l'area, facendo il semiprodotto delle sue diagonali:

$$\mathcal{A}_{ACBD} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (2 \cdot 12) = \mathbf{360}$$