Semplifica le seguenti espressioni numeriche ed esprimi il risultato in modo che gli eventuali denominatori non contengano radicali

1. $\left[\left(\sqrt{2}+2\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1\right]\cdot\frac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$$=\left[2+4+4\sqrt{2}-\left(4+3+4\sqrt{3}\right)+1\right]\cdot\frac{7-1}{2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\left(7+4\sqrt{2}-7-4\sqrt{3}\right)\cdot\frac{6}{2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\left(4\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=4\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=4\cdot 3=\mathbf{12}$$

2. $\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{7}}\left(2\sqrt{3}+2+\sqrt{21}+\sqrt{7}\right)-\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+3+\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{15}+8\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+8}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{7}}\left(2\left(\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)-\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+4\right)}{2\left(\sqrt{5}+4\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{7}}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{7}\right)-2=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-2=3-1-2=\mathbf{0}$$

3. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{3}-5}{13}$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2\sqrt{3}-5}{13}=\left(\frac{1}{3}+\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\frac{2\sqrt{3}-5}{13}=$$

$$=\frac{2+3+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-5}{13}=\frac{5+2\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-5}{13}=\frac{12-25}{6\cdot 13}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

4. $\left(\sqrt{\frac{27}{5}}:\sqrt{\frac{3}{125}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}+\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}\right):\sqrt{98}$

$$=\left(\sqrt{\frac{27}{5}\cdot\frac{125}{3}}+\sqrt{\frac{8}{18}}+\sqrt{\frac{20}{45}}\right):\sqrt{98}=\left(\sqrt{9\cdot 25}+\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{98}}=\left(15+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{49}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{14}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}\sqrt{\mathbf{2}}$$

Semplifica le seguenti espressioni letterali, ponendo le condizioni di esistenza e discutendo l'eventuale valore assoluto nel risultato:

5. $\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right)+\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right)$

$C.E.: 1-x^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{-1\leq x\leq 1}$

$$=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+1}\right)=x^2+1-(1-x^2)=x^2+1-1+x^2=\boldsymbol{2x^2}$$

oppure: $=\sqrt{1-x^4}-(1-x^2)+x^2+1-\sqrt{1-x^4}=-1+x^2+x^2+1=\boldsymbol{2x^2}$

6. $\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a^3+a^2}-\sqrt{a^3+3a^2+3a+1}\right):\ \sqrt{a+1}$

$=\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a^2(a+1)}-\sqrt{(a+1)^3}\right):\sqrt{a+1}=$ $\quad C.E.: a+1>0 \quad \Rightarrow \quad a>-1$

$=\dfrac{\sqrt{a+1}+|a|\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}=\dfrac{\sqrt{a+1}(1+|a|-a-1)}{\sqrt{a+1}}=|a|-a=$ $\quad Se\ -1<a<0:\ \ \boldsymbol{-2a}$ $\quad Se\ a\geq 0:\ \ \boldsymbol{0}$

7. $\sqrt{a-2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4-a^2}}\cdot\sqrt[6]{a+2}$

$C.E.: \begin{cases} a-2\geq 0 \\ 4-a^2\neq 0 \\ a+2\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\geq 2 \\ a\neq \pm 2 \\ a\geq -2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{a>2}$

$=\sqrt[6]{(a-2)^3}\cdot\dfrac{1}{-\sqrt[6]{(a^2-4)^2}}\cdot\sqrt[6]{a+2}=-\sqrt[6]{\dfrac{(a-2)^3\cdot(a+2)}{(a-2)^2(2+a)^2}}=-\sqrt[6]{\dfrac{\boldsymbol{a-2}}{\boldsymbol{2+a}}}$

Determina il dominio e il segno delle seguenti funzioni:

8. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

$C.E.: \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x-1)>0 \\ x>-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<1 \ \vee \ x>2 \\ x>-3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{-3<x<1 \ \vee \ x>2}$

Trattandosi di una somma di radicali che non possono mai essere nulli (avendo numeratore pari a 1), la funzione sarà sempre positiva, ovvero:

$\boldsymbol{y>0:\ \forall x\in D} \qquad \boldsymbol{y\leq 0:\ \nexists x\in D}$

9. $y=\sqrt[3]{\frac{3x-5}{x-3}}$

$C.E.: x-3\neq 0 \qquad \boldsymbol{x\neq 3}$

Trattandosi di un radicale cubico, la funzione sarà positiva quando il radicando è positivo e negativa quando lo è il radicando, perciò studiamo il segno del radicando:

$\dfrac{3x-5}{x-3}>0 \qquad N>0:\ x>\dfrac{5}{3} \quad D>0:\ x>3 \qquad x<\dfrac{5}{3} \ \vee \ x>3$

$\boldsymbol{y>0:\ x<\frac{5}{3} \ \vee \ x>3;} \qquad \boldsymbol{y=0:\ x=\frac{5}{3};} \qquad \boldsymbol{y<0:\ \frac{5}{3}<x<3}$

10. $y=\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{x}$

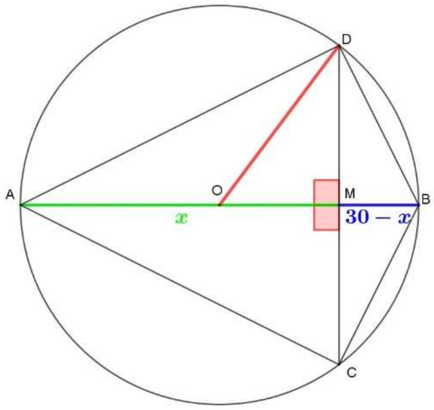
$C.E.:\ x\neq 0$

Per studiare il segno più facilmente, porto il denominatore dentro la radice: $y=\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^3}}=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2}}$

Si può, quindi, notare come il segno dipenda unicamente dal numeratore, visto che il denominatore è sempre positivo, perciò:

$\boldsymbol{y>0:\ x>2;} \qquad \boldsymbol{y=0:\ x=2;} \qquad \boldsymbol{y<0:\ x<2 \ \wedge \ x\neq 0}$

11. In una circonferenza di diametro AB pari a 30, è data una corda CD che interseca il diametro nel proprio punto medio M. Sapendo che $\frac{3}{4}AM + \frac{1}{3}MB = 20$, determina l'area del quadrilatero ACBD. (Poni $AM = x$).



Avendo indicato il segmento AM con x, il segmento MB sarà pari a $30 - x$, essendo dato dalla differenza tra il diametro AB e il segmento AM.
Possiamo quindi tradurre la relazione data in un'equazione di primo grado:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}(30 - x) = 20$$

$$\frac{3}{4}x + 10 - \frac{1}{3}x = 20 \qquad \frac{5}{12}x = 10 \qquad x = 24$$

Dato che il diametro AB interseca la corda CD nel suo punto medio, il diametro è perpendicolare alla corda. Possiamo quindi determinare la lunghezza della corda, usando il teorema di Pitagora:

$$DM = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 - \left(24 - \frac{30}{2}\right)^2} = 12$$

Il quadrilatero ACBD è un deltoide, ovvero un quadrilatero con le diagonali perpendicolari. Possiamo quindi determinarne l'area, facendo il semiprodotto delle sue diagonali:

$$\mathcal{A}_{ACBD} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (2 \cdot 12) = \mathbf{360}$$