1. Siano date due parabole tangenti alla retta $t: 12x - 5y - 45 = 0$ nel suo punto T di ordinata 3, tali che la retta $y = 3$ stacchi su entrambe una corda di lunghezza 5. Verificato che le due parabole sono congruenti e chiamata $\mathcal{P}_1$ la parabola con concavità positiva, indica i vertici con V_1 e V_2. Dati A e B punti di intersezione tra la retta t e gli assi di simmetria di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ rispettivamente, determina l'area del quadrilatero V_1AV_2B.

Il punto di ordinata 3 della retta data t è, sostituendo l'ordinata nell'equazione della retta, $T(5, 3)$. Posso, quindi, scrivere l'equazione del fascio di parabole tangenti a una retta data in un punto noto: $y = \frac{12}{5}x - 9 + k\,(x-5)^2$. Se la retta $y = 3$ stacca su entrambe le parabole una corda di lunghezza 5, dato che passa per il punto T, intersecherà le due parabole una nel punto $P(0, 3)$ e l'altra nel punto $Q(10, 3)$, dato che:

$$|x - 5| = 5 \quad \Rightarrow \quad x - 5 = \pm 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10 \quad x_2 = 0$$

Per determinare le equazioni delle parabole, è sufficiente sostituire le coordinate dei due punti:

$$P(0; 3):\ \ 3 = -9 + 25\,k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{12}{25} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{P}_1: y = \frac{12}{25}x^2 - \frac{12}{5}x + 3}$$

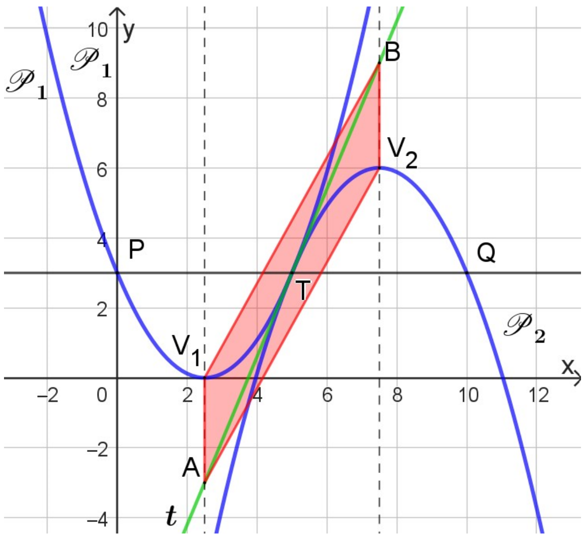
$$Q(10; 3):\ \ 3 = 24 - 9 + 25\,k \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{12}{25} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{P}_2: y = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{36}{5}x - 21}$$

Le due parabole, come previsto, sono congruenti, dato che hanno lo stesso coefficiente del termine di secondo grado in valore assoluto. Determino le coordinate dei vertici:

$$V_1\left(\frac{5}{2}; 0\right) \qquad V_2\left(\frac{15}{2}; 6\right)$$

Gli altri vertici del quadrilatero possono essere determinati risolvendo i sistemi, cioè intersecando la retta t con gli assi di simmetria delle parabole:

$$\begin{cases} y = \frac{12}{5}x - 9 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \quad A\left(\frac{5}{2}; -3\right) \qquad \begin{cases} y = \frac{12}{5}x - 9 \\ x = \frac{15}{2} \end{cases} \quad B\left(\frac{15}{2}; 9\right)$$



I due lati sono paralleli, dato che i due segmenti sono su due rette parallele all'asse y, inoltre $\overline{AV_1} = \overline{BV_2} = 3$. Avendo due lati opposti paralleli e congruenti, il quadrilatero è un parallelogramma.

Determino l'altezza del parallelogramma: $h = d(A; a_2) = \left|\frac{5}{2} - \frac{15}{2}\right| = 5$ e, quindi, l'area:

$$\mathcal{A} = \overline{AV_1} \cdot h = 5 \cdot 3 = \mathbf{15}$$

2. Considera due parabole $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ con asse parallelo all'asse y: la parabola $\mathcal{P}_1$ passa per i punti $A(-2;3)$, $B(1;\ -3)$ e ha vertice di ascissa $\frac{1}{2}$, mentre la parabola $\mathcal{P}_2$ passa per il punto $C(2;\ -6)$ ed è tangente a $\mathcal{P}_1$ nel suo punto D di intersezione con l'asse y.

   $a.$ Determina le equazioni di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e quella della retta t tangente in D a entrambe le parabole.

   Verificato che l'equazione della parabola con apertura maggiore è $y=-\frac{1}{4}x^2-x-3$, chiama E l'ulteriore punto d'intersezione tra $\mathcal{P}_1$ e la retta n perpendicolare a t che passa per D.

   $b.$ Verifica che la retta s tangente a $\mathcal{P}_1$ in E, incontra la retta t nel suo punto P di ordinata -4. Calcola l'area del triangolo mistilineo PDE, in cui un lato è l'arco DE della parabola $\mathcal{P}_1$.

   $c_1.$ Trova l'equazione dell'ulteriore retta tangente a $\mathcal{P}_2$ condotta dal punto P determinato prima, e dimostra che passa per il fuoco di $\mathcal{P}_1$.

   $c_2.$ Trova le parabole degeneri del fascio generato da $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Dimostra che i vertici di tutte le parabole del fascio sono allineati lungo una stessa retta e determinane l'equazione.

a. Determino innanzi tutto l'equazione della prima parabola, usando la generica ascissa del vertice e sostituendo le coordinate dei punti dati nell'equazione generica della parabola $y=ax^2+bx+c$:

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}\\ 3=4a-2b+c\\ -3=a+b+c\end{cases}\qquad\begin{cases}b=-a\\ 6a+c=3\\ c=-3\end{cases}\qquad\begin{cases}c=-3\\ a=1\\ b=-1\end{cases}\qquad \boldsymbol{\mathcal{P}_1: y=x^2-x-3}$$

Visto che la seconda parabola è tangente in D alla prima parabola, so che il punto $D(0;\ -3)$ e posso determinare la tangente, usando la formula di sdoppiamento:

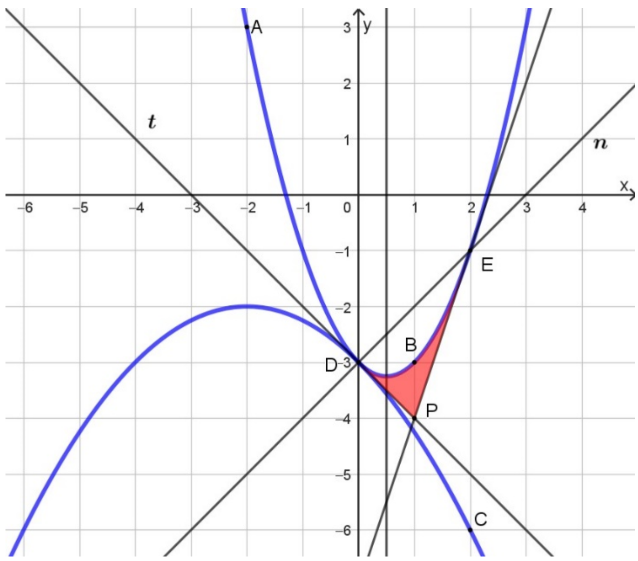
$$\frac{y-3}{2}=0x-\frac{x+0}{2}-3\qquad t: y=-x-3$$

Determino, quindi, l'equazione del fascio di parabole tangenti in D alla retta t: $y=-x-3+kx^2$. Determino il valore del parametro, sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione del fascio:

$$-6=-2-3+4k\quad\Rightarrow\quad k=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\mathcal{P}_2: y=-\frac{1}{4}x^2-x-3}$$

b. Determino l'equazione della retta n: $y+3=1(x-0)\quad\Rightarrow\quad n: y=x-3$. Determino le coordinate di E, mettendo a sistema l'equazione di n e quella della parabola:

$$\begin{cases}y=x-3\\ y=x^2-x-3\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2-2x=0\\ y=x-3\end{cases}\qquad x(x-2)=0\qquad x_D=0\qquad x_E=2\qquad E(2;\ -1)$$



Determino l'equazione della tangente alla parabola in E, usando la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y-1}{2}=2x-\frac{x+2}{2}-3\qquad t_1:\ y=3x-7$$

Determino le coordinate del punto P, mettendo a sistema l'equazione della tangente appena determinata con la tangente t:

$$\begin{cases}y=3x-7\\ y=-x-3\end{cases}\qquad\begin{cases}3x-7=-x-3\\ y=-x-3\end{cases}\qquad P(1;\ -4)$$

Come previsto, il punto ha ordinata -4.

Per determinare l'area del triangolo mistilineo indicato in figura, faccio la differenza tra l'area del triangolo rettangolo DPE (rettangolo perché $n\perp t$) e l'area del segmento parabolico di base DE. Ricordo, inoltre, che DE è sulla retta n, perciò ha coefficiente angolare 1. Quindi determino la tangente alla parabola parallela a DE.

Metto a sistema l'equazione della parabola con quella della generica parallela a n: $y = x + q$ e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = x + q \\ y = x^2 - x - 3 \end{cases} \qquad x^2 - 2x - 3 - q = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 + 3 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -4$$

La tangente è t_2: $y = x - 4$ e $d(D; t_2) = \frac{|-3+4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, perciò:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{PED} - \mathcal{A}_{DE} = \frac{1}{2}\overline{PD} \cdot \overline{DE} - \frac{2}{3}\overline{DE} \cdot d(D; t_2) = \overline{DE}\left(\frac{1}{2}\overline{PD} - \frac{2}{3}d(D; t_2)\right)$$

Calcolo i dati mancanti:

$$\overline{DE} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \qquad \overline{PD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\mathcal{A} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

c. I due punti c proposti sono a scelta:

1. Trovo l'equazione della tangente a $\mathcal{P}_2$ uscente da P, mettendo a sistema la generica retta passante per P con l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = m(x - 1) - 4 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 3 \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x^2 + (m + 1)\,x - 1 - m = 0 \qquad \Delta = (m + 1)^2 + 1 + m = 0$$

$$(m + 1)(m + 2) = 0 \qquad \begin{matrix} m_1 = -1 \\ m_2 = -2 \end{matrix}$$

Il primo valore di m determinato corrisponde a quello della retta t, perciò la retta richiesta ha equazione: $y = -2x - 2$. Determino le coordinate del fuoco della prima parabola:

$$F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{-13 + 1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2};\ -3\right)$$

Sostituendo le coordinate del fuoco nell'equazione della retta, verifico l'appartenenza: $-3 = -1 - 2 \qquad c.v.d.$

2. Il fascio delle parabole date ha equazione $y = -x - 3 + kx^2$ come determinato nel punto a. Le parabole degeneri sono la retta tangente t: $y = -x - 3$ e la parabola $x^2 = 0$. Il generico vertice ha coordinate:

$$V\left(\frac{1}{2k};\ -\frac{1 + 12k}{4k}\right) = \left(\frac{1}{2k};\ -\frac{1}{4k} - 3\right)$$

Determino l'equazione del luogo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2k} \\ y = -\frac{1}{4k} - 3 \end{cases} \qquad y = -\frac{1}{2}x - 3$$

Il luogo trovato è una retta, come previsto.