1. Un modellino radiocomandato di aereo percorre una traiettoria circolare di raggio $36\,m$ alla velocità di $18\,m/s$, quando viene sottoposto per $6{,}5\,s$ all'accelerazione tangenziale di $1{,}3\,m/s^2$. Calcola quanti giri percorre durante la fase di accelerazione.

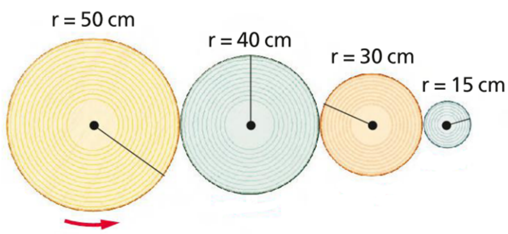
$$r = 36\,m \qquad v_o = 18\,m/s \qquad \Delta t = 6{,}5\,s \qquad a_T = 1{,}3\,m/s^2 \qquad N?$$

Il numero di giri percorso è dato dal rapporto tra la distanza angolare percorsa nella fase di accelerazione e l'ampiezza dell'angolo giro espressa in radianti. Inoltre, la distanza angolare è data dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato espressa con le grandezze angolari:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\omega_o \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2}{2\pi} = \frac{\frac{v_o}{r} \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\frac{a_T}{r}(\Delta t)^2}{2\pi} = \mathbf{0{,}64\ giri}$$

2. Quattro dischi ruotano insieme senza strisciare. Il disco di raggio $50\,cm$ (figura 1) ha velocità angolare di $18\,rad/s$. In quale verso ruota il disco di raggio $15\,cm$? Qual è il rapporto tra la velocità angolare del disco di raggio $15\,cm$ e quella del disco di raggio $50\,cm$?

$$r_A = 50\,cm \qquad r_D = 15\,cm \qquad \omega_A = 18\,rad \qquad \frac{\omega_D}{\omega_A}?$$



Se il primo disco ruota in senso antiorario, il secondo ruota in senso orario, il terzo in senso antiorario e il quarto, di conseguenza, **in senso orario**.
Visto che i dischi ruotano insieme senza strisciare, hanno la stessa velocità tangenziale, perciò, considerando il disco più grande e quello più piccolo e la relazione tra velocità tangenziale e velocità angolare, si ottiene:

$$v_A = v_D \quad \Rightarrow \quad \omega_A r_A = \omega_D r_D \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_D}{\omega_A} = \frac{r_A}{r_D} = \mathbf{\frac{10}{3}}$$

3. Un'asta di massa $3{,}0\,kg$ è imperniata a $1/3$ della sua lunghezza. Quale massa occorre appendere e a quale estremità perché l'asta resti in equilibrio?

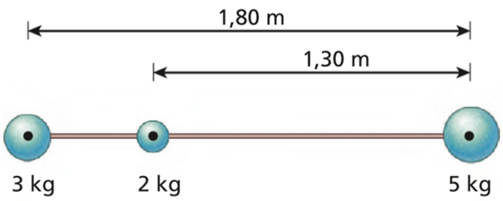
$$M = 3{,}0\,kg \qquad x = \frac{1}{3}L \qquad m? \qquad x_m?$$

Perché l'asta resti in equilibrio, la somma dei momenti delle forze agenti deve essere nulla, perciò, mentre il peso dell'asta fa ruotare l'asta in un senso, la massa aggiunta deve far ruotare l'asta in senso opposto. Supponiamo che il centro di massa, che è a metà dell'asta, sia a destra del fulcro dell'asta (ovvero a distanza $\frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L = \frac{1}{6}L$ dal fulcro): la rotazione che verrà generata dal peso dell'asta sarà in senso orario e la massa deve essere aggiunta nell'estremo opposto (a distanza 1/3 L dal fulcro), in maniera tale da generare una rotazione antioraria:

$$M_M = M_m \quad \Rightarrow \quad Mg \cdot \frac{1}{6}L = mg \cdot \frac{1}{3}L \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{6}M = \mathbf{1{,}5\,kg}$$

4. Su un'asta di massa trascurabile sono fissate tre masse, come indicato nella figura 2. Qual è il momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare che passa per il centro di massa?

$$m_1 = 3\,kg \qquad x_1 = 0\,m \qquad m_2 = 2\,kg \qquad x_2 = 0{,}50\,m \qquad m_3 = 5\,kg \qquad x_3 = 1{,}80\,m \qquad I?$$



Determino innanzi tutto l'ascissa del centro di massa del sistema, considerando come origine il punto in cui si trova la massa di $3\,kg$:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 1{,}0\,m$$

Il momento d'inerzia di una massa che ruota attorno a un punto è dato dal prodotto tra la massa e il quadrato della sua distanza dal centro di rotazione, perciò:

$$I = m_1(x_1 - x_{CM})^2 + m_2(x_2 - x_{CM})^2 + m_3(x_3 - x_{CM})^2 = \mathbf{6{,}7\,kg \cdot m^2}$$

5. Un volano è costituito da un disco d'acciaio di densità $7{,}86 \cdot 10^3\ kg/m^3$, di raggio $10\ cm$ e spessore $3{,}0\ cm$. Quanta energia cinetica accumula quando ruota a $1000\ giri/min$?

$$d = 7{,}86 \cdot 10^3\ kg/m^3 \qquad r = 0{,}10\ m \qquad s = 0{,}030\ m \qquad \omega = 1000\ giri/min \qquad K?$$

Visto che il volano ruota, ma non trasla, la sua energia cinetica è solo rotazionale, ovvero: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Trattandosi di un disco omogeneo, il momento d'inerzia è dato da: $I = \frac{1}{2}mr^2$. Dalla definizione di densità e dal volume del cilindro posso ricavare la massa del disco:

$$d = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = dV = d\pi r^2 s$$

Posso, quindi, calcolare l'energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{4}\pi d s r^4\omega^2 = \mathbf{200\ J}$$

6. Una donna di $60\ kg$ è ferma sul bordo esterno di una giostra con massa $250\ kg$ e raggio $3{,}2\ m$. La giostra ruota a $0{,}35\ giri/s$. La donna cammina verso l'asse della giostra e si ferma a $1{,}1\ m$ da esso. Quanto vale la velocità di rotazione finale della giostra?

$$m = 60\ kg \quad M = 250\ kg \quad R = 3{,}2\ m \quad \omega_o = 0{,}35\ giri/s \quad r = 1{,}1\ m \quad \omega?$$

La giostra può essere considerata come un disco omogeneo ruotante attorno al proprio asse di simmetria, perciò $I = \frac{1}{2}MR^2$. Il momento d'inerzia della donna, invece, è quello di una particella che ruota attorno a un punto, perciò è pari a mR^2 nella fase iniziale del moto e mr^2 quando la donna si è spostata verso l'asse di rotazione. Applicando la conservazione del momento angolare, ottengo:

$$L_o = L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_o = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_o \frac{R^2\left(\frac{1}{2}M + m\right)}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} = \mathbf{0{,}49\ giri/s}$$

7. Due dischi ruotano attorno allo stesso asse di rotazione. Il disco A ha un momento d'inerzia di $3{,}4\ kg \cdot m^2$ e una velocità angolare di $7{,}2\ rad/s$. Il disco B ha una velocità angolare di $-9{,}8\ rad/s$. I due dischi vengono poi collegati tra loro senza applicare alcun momento di forza risultante esterno e ruotano come un oggetto unico con una velocità angolare di $-2{,}4\ rad/s$. L'asse di rotazione di questo oggetto è lo stesso di quello dei due dischi separati. Qual è il momento d'inerzia del disco B?

$$I_A = 3{,}4\ kg\ m^2 \quad \omega_A = 7{,}2\ rad/s \quad \omega_B = -9{,}8\ rad/s \quad \omega = -2{,}4\ rad/s \quad I_B?$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L_o = L_1 \quad \Rightarrow \quad I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega \quad \Rightarrow \quad I_B(\omega_B - \omega) = I_A(\omega - \omega_A) \quad \Rightarrow \quad I_B = I_A\frac{\omega - \omega_A}{\omega_B - \omega} = \mathbf{4{,}4\ kg\ m^2}$$

8. Una stella di raggio $7{,}0 \cdot 10^5\ km$ compie un giro su se stessa in 30 giorni. Alla fine della sua vita collasserà in una stella di neutroni rotante di raggio $15\ km$ chiamata *pulsar*. Quanti giri compirà la pulsar in un secondo?

$$R_1 = 7{,}0 \cdot 10^5\ km \quad \omega_1 = 1\ giro/30d \quad R_2 = 15\ km \quad N?$$

Per la conservazione del momento angolare, considerando che possiamo considerare le stelle come particelle puntiformi che ruotano attorno a un punto e per la definizione di velocità angolare:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad mR_1^2\omega_1 = mR_2^2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 840\ giri/s$$

Per rispondere alla domanda posta: la pulsar compirà **840** giri in un secondo.