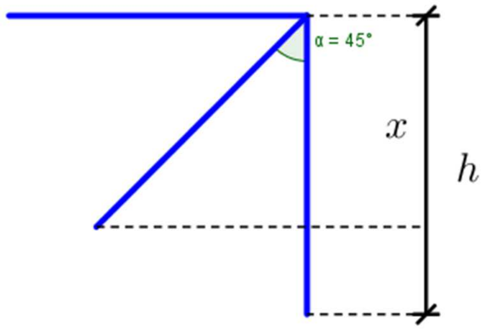
1. Un bambino di massa 30,0 kg si sta dondolando sull'altalena. Le corde a cui è fissata l'altalena sono lunghe 2,00 m. Scegliendo come livello di zero la posizione più bassa che il bambino può assumere, calcola l'energia potenziale gravitazionale del bambino nelle situazioni seguenti:
   A. quando le corde dell'altalena sono orizzontali;
   B. quando le corde dell'altalena formano un angolo di 45,0° rispetto alla verticale;
   C. quando le corde dell'altalena sono perpendicolari al terreno.

$$m = 30{,}0\ kg \qquad h = 2{,}00\ m \qquad U_A? \qquad \alpha = 45{,}0° \qquad U_B? \qquad U_C?$$

A. Quando le corde dell'altalena sono orizzontali, il bambino è all'altezza massima, 2,00 m, perciò la sua energia potenziale è:

$$U_A = mgh = \mathbf{588\ J}$$



B. Quando le corde formano un angolo di 45,0° rispetto alla verticale, il bambino raggiunge un'altezza $h - x$, come si vede dalla figura. Si nota che, tracciando la perpendicolare alla verticale, si viene a formare un triangolo rettangolo con cateti pari a x e ipotenusa pari a 2,00 m. In questo modo possiamo trovare il cateto e, quindi, l'altezza del bambino:

$$x^2 + x^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

$$U_B = mg\ (h - x) = \mathbf{172\ J}$$

C. Nell'ultimo caso, quando le corde dell'altalena sono perpendicolari al terreno, l'altezza raggiunta dal bambino è zero, perché è l'altezza più bassa che può raggiungere il bambino, perciò:

$$U_C = \mathbf{0\ J}$$

2. Una massa di 1,0 kg viene lasciata cadere da una quota h all'interno di una campana di vetro. In un primo esperimento viene fatto il vuoto internamente alla campana e la massa arriva al suolo in 2,0 s. Successivamente viene ripetuto l'esperimento riempiendo la campana di un gas ad alta densità. Si constata che l'energia cinetica della massa quando arriva al suolo, nel secondo esperimento, è 182,1 J. Calcola l'energia dissipata, in varie forme, nel secondo esperimento.

$$m = 1{,}0\ kg \qquad h \qquad t = 2{,}0\ s \qquad K_B = 182{,}1\ J \qquad K_{dis}?$$

Devo determinare l'energia cinetica del primo esperimento K_A, quando la massa non incontra resistenza durante la sua caduta, perché $K_{dis} = K_B - K_A$. Determino quindi la velocità finale di caduta, conoscendo il tempo di caduta e l'accelerazione (pari a quella di gravità) e la velocità iniziale (nulla, visto che la massa viene lasciata cadere):

$$v = v_o + at = gt$$

$$K_{dis} = K_B - K_A = K_B - \frac{1}{2}mv^2 = K_B - \frac{1}{2}m\,(gt)^2 = \mathbf{-10\ J}$$

3. In un idrante, l'acqua scorre con una velocità di 1,5 m/s. All'uscita del tubo, di raggio 5,0 cm, c'è un ugello, di raggio 2,5 cm. Con quale velocità l'acqua attraversa l'ugello? Calcola, trascurando l'attrito, a quale distanza dall'ugello cadrà l'acqua se l'idrante è tenuto orizzontalmente a 1,0 m dal suolo.

$v_1 = 1{,}5\ m/s \qquad r_1 = 5{,}0\ cm \qquad r_2 = 2{,}5\ cm \qquad v_2? \qquad h = 1{,}0\ m \qquad x?$

Posso ricavare la velocità v_2 usando l'equazione di continuità:

$$\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = v_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = \mathbf{6{,}0\ m/s}$$

Determinare la distanza dall'ugello a cui cadrà l'acqua se l'idrante è tenuto orizzontalmente è come determinare la gittata in un moto parabolico con velocità iniziale orizzontale di 6,0 m/s.

Le equazioni del moto sono: $\begin{cases} x = v_2 t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Determino il tempo di volo della palla, risolvendo la seconda equazione con $y = 0$: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Sostituisco nella prima equazione e ricavo la distanza percorsa in orizzontale:

$$x = v_2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \mathbf{2{,}7\ m}$$

4. Un tubo di diametro interno 2,5 cm porta l'acqua, proveniente dal livello stradale, in un'abitazione alla pressione di 1,9 bar. Se si apre un rubinetto di diametro 1,3 cm al primo piano, posto a 3,5 m dal piano stradale, l'acqua impiega 28 s per riempire una caraffa da 1,0 L.
   A. Calcola la velocità dell'acqua durante il riempimento della caraffa sia nel rubinetto che nel tubo al livello stradale.
   B. Calcola la pressione dell'acqua al primo piano.

$d_A = 2{,}5\ cm \qquad p_A = 1{,}9\ bar = 1{,}9 \cdot 10^5\ Pa \qquad d_B = 1{,}3\ cm \qquad h_A = 0{,}0\ m$

$h_B = 3{,}5\ m \qquad t = 28\ s \qquad V = 1{,}0\ L \qquad v_B? \qquad p_B?$

A. Dalla portata posso ricavare la velocità nel punto A:

$$\frac{V}{t} = \frac{Sl}{t} = S\frac{l}{t} = \pi r_A^2 v_A = \pi \left(\frac{d_A}{2}\right)^2 v_A \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \frac{V}{t} \cdot \frac{4}{d_A^2 \pi} = \mathbf{7{,}3 \cdot 10^{-2}\ m/s}$$

Posso ricavare la velocità in B allo stesso modo o usando l'equazione di continuità:

$$\rho S_A v_A = \rho S_B v_B \qquad \Rightarrow \qquad v_B = v_A \frac{S_A}{S_B} = v_A \frac{\pi \left(\frac{d_A}{2}\right)^2}{\pi \left(\frac{d_B}{2}\right)^2} = v_A \frac{d_A^2}{d_B^2} = \mathbf{2{,}7 \cdot 10^{-1}\ m/s}$$

B. Per ricavare la pressione dell'acqua al primo piano, applico l'equazione di Bernoulli:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \qquad \Rightarrow \qquad p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho g h_B = \mathbf{1{,}6\ bar}$$

5. Tre carrelli di massa m che si stanno muovendo, agganciati e in assenza di attrito, su un piano orizzontale liscio alla velocità di 10 m/s urtano in modo anelastico altri due carrelli fermi che hanno la stessa massa. Con che velocità procederanno i carrelli dopo l'urto?

$$m_1 = 3m \qquad v_1 = 10\,m/s \qquad m_2 = 2m \qquad v_2 = 0\,m/s \qquad V?$$

Si tratta di un urto totalmente anelastico, perciò si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$p_i = p_f \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\,V$$

$$V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{3m}{3m + 2m} v_1 = \frac{3}{5} v_1 = \mathbf{6,0\ m/s}$$

6. Una pallina di massa $3m$ si muove a velocità v e urta elasticamente un'altra pallina di massa m. Dopo l'urto le palline si muovono lungo la stessa direzione d'arrivo della prima pallina. Calcola le velocità delle due palline dopo l'urto.

$$m_1 = 3m \qquad v_1 = v \qquad m_2 = m \qquad v_2 = 0\,m/s \qquad V_1? \qquad V_2?$$

Trattandosi di un urto elastico, valgono la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3mv = 3mV_1 + mV_2 \\ 3mv^2 = 3mV_1^2 + mV_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\,(v - V_1) = V_2 \\ 3\,(v - V_1)(v + V_1) = V_2^2 \end{cases}$$

Dividendo la seconda equazione del sistema per la prima e mettendo a sistema la relazione così ottenuta con la prima equazione, abbiamo un sistema di primo grado:

$$\begin{cases} v + V_1 = V_2 \\ 3v - 3V_1 = v + V_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{V_1 = \frac{1}{2} v} \\ \boldsymbol{V_2 = \frac{3}{2} v} \end{cases}$$

7. Un bilanciere da ginnastica è costituito da due dischi omogenei di massa rispettivamente 4,0 kg e 6,0 kg. L'asta, di massa trascurabile, che li collega è lunga 20 cm. Determina la posizione del centro di massa del bilanciere.

$$m_1 = 4{,}0\,kg \qquad m_2 = 6{,}0\,kg \qquad x_1 = 0{,}0\,cm \qquad x_2 = 20\,cm \qquad x_{CM}?$$

Il centro di massa di un sistema di più masse puntiformi di cui è nota la posizione avrà ascissa:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{0,12\ m}$$

8. Una pallina di massa m sta procedendo con velocità v lungo l'asse x, quando urta elasticamente una pallina di uguale massa, ferma. Dimostra che dopo l'urto le due palline avranno velocità perpendicolari tra loro.

Trattandosi di un urto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica, perciò:

$$\begin{cases} m\vec{v} = m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 \\ \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\vec{V}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\vec{V}_2^{\,2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ \vec{v}^2 = \vec{V}_1^{\,2} + \vec{V}_2^{\,2} \end{cases}$$

Elevando a quadrato la prima relazione, otteniamo:

$$\begin{cases} \vec{v}^2 = \vec{V}_1^{\,2} + \vec{V}_2^{\,2} + 2\,\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \\ \vec{v}^2 = \vec{V}_1^{\,2} + \vec{V}_2^{\,2} \end{cases}$$

Dal confronto delle due equazioni otteniamo:

$$\vec{V}_1^{\,2} + \vec{V}_2^{\,2} + 2\,\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1^{\,2} + \vec{V}_2^{\,2} \quad \Rightarrow \quad 2\,\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

Il prodotto scalare di due vettori non nulli è uguale a zero quando i due vettori sono perpendicolari tra loro, perciò:

$$\boldsymbol{\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2}$$