1. Partendo da fermo, un disco ruota attorno al proprio asse con accelerazione angolare costante. Dopo 5,0 s è ruotato di 25 rad.
   A. Qual è stata l'accelerazione angolare durante questo intervallo?
   B. E la velocità angolare media?
   C. Qual è la velocità angolare istantanea del disco al termine dei 5,0 s?
   D. Supponiamo che l'accelerazione non cambi. Quale angolo percorre nei successivi 5,0 s?

$$\omega_o = 0\,rad/s \qquad \Delta t_1 = 5{,}0\,s \qquad \Delta\theta_1 = 25\,rad \qquad \alpha? \qquad \omega_m? \qquad \omega_1? \qquad \Delta t_2 = 5{,}0\,s \qquad \Delta\theta_2?$$

Applico le formule della cinematica rotazionale (che sono le stesse del moto rettilineo uniformemente accelerato, solo che vengono espresse tramite le grandezze angolari):

A. Parto dalla legge oraria: $\Delta\theta = \omega_o\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\Delta\theta_1}{(\Delta t_1)^2} = \mathbf{2,0\ rad/s^2}$

B. Dalla definizione di velocità media: $\omega_m = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t_1} = \mathbf{5,0\ rad/s}$

C. Dalla legge oraria della velocità: $\omega_1 = \omega_o + \alpha\Delta t_1 = \mathbf{10\ rad/s}$

D. Dalla legge oraria, ma con una velocità angolare iniziale ω_1, ottengo: $\Delta\theta_2 = \omega_1\Delta t_2 + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t_2)^2 = \mathbf{75\ rad}$

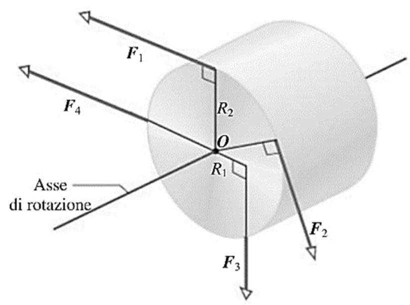
2. Dimostra che il momento d'inerzia di una asticella di lunghezza L che ruota attorno a un asse perpendicolare passante a $\frac{1}{3}L$ dal suo estremo è $\frac{1}{9}mL^2$.

Applico il **teorema di Steiner**, per il quale il momento d'inerzia di un oggetto rispetto a un asse (in questo caso passante a 1/3 L dal suo estremo) è dato dalla somma del momento d'inerzia rispetto a un asse parallelo a quello considerato e passante per il centro di massa (quindi considerando l'asticella come ruotante attorno al suo centro) e la massa per la distanza tra gli assi al quadrato (che in questo caso sarà data da: $\frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L = \frac{1}{6}L$), in altre parole:

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\cdot\left(\frac{1}{6}L\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{36}mL^2 = \mathbf{\frac{1}{9}mL^2} \qquad c.v.d.$$

3. Un cilindro di massa 2,0 kg può ruotare attorno al proprio asse (longitudinale) passante per O. Nel piano della sezione rappresentata nella figura 1 sono applicate quattro forze, aventi le intensità F e le distanze R dal centro O della sezione qui di seguito indicate: $F_1 = 6{,}0\,N$, $F_2 = 4{,}0\,N$, $F_3 = 2{,}0\,N$, $F_4 = 5{,}0\,N$, $R_1 = 5{,}0\,cm$, $R_2 = 12{,}0\,cm$. Durante la rotazione le forze mantengono gli stessi angoli rispetto al cilindro. Trova il modulo e il verso dell'accelerazione angolare del cilindro.

$$F_1 = 6{,}0\,N \qquad F_2 = 4{,}0\,N \qquad F_3 = 2{,}0\,N \qquad F_4 = 5{,}0\,N \qquad R_1 = 5{,}0\cdot 10^{-2}\,m \qquad R_2 = 12{,}0\cdot 10^{-2}\,m$$
$$m = 2{,}0\,kg \qquad \theta_1 = 90° \qquad \theta_2 = 90° \qquad \theta_3 = 90° \qquad \theta_4 = 180° \qquad \vec{\alpha}?$$



Per il secondo principio della dinamica per il moto di rotazione: $\Sigma\vec{M} = I\vec{\alpha}$.
Comincio dalla definizione di momento torcente, data da: $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$
$|\vec{M_1}| = |\vec{R_2}\times\vec{F_1}| = R_2F_1\sin\theta_1 = R_2F_1$ con direzione parallela a quella dell'asse di rotazione e verso uscente dalla sezione indicata (e quindi positivo, visto che genera una rotazione antioraria).
$|\vec{M_2}| = |\vec{R_2}\times\vec{F_2}| = R_2F_2\sin\theta_2 = R_2F_2$ con direzione parallela a quella dell'asse di rotazione e verso entrante nella sezione indicata (e quindi negativo, visto che genera una rotazione oraria).

$|\vec{M_3}| = |\vec{R_1}\times\vec{F_3}| = R_1F_3\sin\theta_3 = R_1F_3$ con direzione parallela a quella dell'asse di rotazione e verso entrante nella sezione indicata (e quindi negativo, visto che genera una rotazione oraria). Infine: $|\vec{M_4}| = |\vec{R_1}\times\vec{F_4}| = R_1F_4\sin\theta_4 = 0$.

Applico il secondo principio della dinamica per il moto di rotazione per determinare l'accelerazione, e ricordo che, trattandosi di un cilindro, il momento d'inerzia è dato da: $I = \frac{1}{2}mR_2^2$

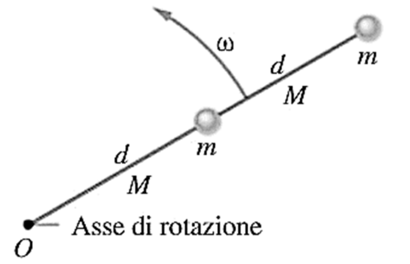
$$\alpha = \frac{\Sigma M}{I} = \frac{R_2F_1 - R_2F_2 - R_1F_3}{\frac{1}{2}mR_2^2} = \mathbf{9,7\ rad/s^2} \qquad con\ senso\ \mathbf{antiorario}$$

4. Come risulta dalla figura 2, due particelle di uguale massa $m = 0{,}85\ kg$ sono collegate tra loro, e a un asse di rotazione passante per il punto O, da due sottili asticelle identiche di massa $M = 1{,}2\ kg$ e lunghezza $d = 5{,}6\ cm$. L'insieme ruota attorno all'asse in O con velocità angolare di $0{,}30\ rad/s$. Calcola:
   A. il momento d'inerzia dell'insieme rispetto a O;
   B. l'energia cinetica rotazionale rispetto a O.

$$m = 0{,}85\ kg \qquad M = 1{,}2\ kg \qquad d = 5{,}6\ cm \qquad \omega = 0{,}30\ rad/s \qquad I? \qquad K?$$

A. Determino il momento d'inerzia, come somma del momento d'inerzia della particella di massa m a distanza d dall'asse di rotazione, di quello della particella di massa m a distanza $2d$ dall'asse di rotazione e di quello dell'asticella di lunghezza $2d$ e di massa $2M$ che ruota attorno a un proprio estremo:

$$I = md^2 + m\,(2d)^2 + \frac{1}{3}\,(2M)(2d)^2 = 5md^2 + \frac{8}{3}Md^2 = \mathbf{2,3 \cdot 10^{-2}\ kg\ m^2}$$



B. È facile determinare l'energia cinetica rotazionale a questo punto:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \mathbf{1,1 \cdot 10^{3}\ J}$$

5. Sono stati sperimentati autobus con trazione a volano, che immagazzina energia in una massa rotante alimentata da un motore elettrico durante le soste. Supponi che il volano sia un cilindro uniforme di massa 500 kg, raggio 1,0 m e azionato alla velocità angolare massima di $200\ \pi\ rad/s$.
   A. Quant'è l'energia cinetica massima immagazzinata?
   B. Se l'autobus dissipa una potenza media di 8,0 kW, quante ore dura la carica del volano?

$$m = 500\ kg \qquad r = 1{,}0\ m \qquad \omega = 200\ \pi\ rad/s \qquad K? \qquad P = 8{,}0\ kW \qquad \Delta t?$$

A. Trattandosi di un cilindro uniforme: $I = \frac{1}{2}mr^2$, dove m è la massa del cilindro e r il suo raggio:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega^2 = \mathbf{4,9 \cdot 10^{7}\ J}$$

B. Sapendo che la potenza è data dal rapporto tra energia e tempo, posso determinare l'intervallo richiesto:

$$P = \frac{K}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{K}{P} = 6{,}2 \cdot 10^3\ s = \mathbf{1,7\ h}$$

6. Una sfera omogenea rotola senza strisciare su una superficie orizzontale. La massa della sfera è 3,6 kg, il suo raggio è 15 cm e la sua energia cinetica totale è 10 J. Calcola la velocità del centro di massa della sfera. Quale percentuale della sua energia cinetica totale è energia cinetica di rotazione attorno al suo centro?

$$m = 3{,}6\ kg \qquad r = 0{,}15\ m \qquad K = 10\ J \qquad v? \qquad \frac{K_r}{K}\%?$$

Trattandosi di una sfera omogenea: $I = \frac{2}{5}mr^2$, dove m è la massa della sfera e r il suo raggio. Calcolo la sua energia cinetica come somma di energia traslazionale ed energia rotazionale e da essa ricavo, mediante formula inversa, la velocità:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10\ K}{7\ m}} = \mathbf{2,0\ m/s}$$

Posso, quindi, determinare il rapporto tra l'energia cinetica rotazionale e quella totale:

$$\frac{K_r}{K} = \frac{\frac{1}{5}mv^2}{\frac{7}{10}mv^2} = \frac{1}{5} : \frac{7}{10} = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{7} = \frac{2}{7} = \mathbf{29\%}$$

7. Una ruota gira liberamente a 800 giri/min attorno a un albero avente momento d'inerzia trascurabile. Un'altra ruota con momento d'inerzia doppio della prima, inizialmente a riposo, è accoppiata d'improvviso allo stesso albero.
   A. Qual è la velocità angolare del sistema risultante albero + due ruote?
   B. Quale percentuale dell'energia cinetica rotazionale iniziale va persa?

$$\omega_o = 800\ giri/min \qquad I_2 = 2\,I_1 \qquad \omega_1? \qquad \frac{K_1 - K_o}{K_o}\%?$$

A. Applicando il principio di conservazione del momento angolare, ottengo:

$$L_o = L_1 \quad \Rightarrow \quad I_1\omega_o = (I_1 + I_2)\,\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_o\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \omega_o\frac{I_1}{I_1 + 2\,I_1} = \frac{1}{3}\omega_o = \mathbf{267\ giri/min}$$

B. Determino la percentuale di energia cinetica rotazionale iniziale che va persa, calcolando il rapporto tra la differenza di energie cinetiche e l'energia cinetica iniziale:

$$\frac{K_1 - K_o}{K_o} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3I_1\left(\frac{1}{3}\omega_o\right)^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_o^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_o^2} = \frac{\frac{1}{2}I_1\omega_o^2\left(3\cdot\frac{1}{9} - 1\right)}{\frac{1}{2}I_1\omega_o^2} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} = \mathbf{-67\%}$$

8. Due sfere hanno la stessa massa m e lo stesso raggio R. Una sfera è piena, formata da un materiale di bassa densità, che occupa il suo intero volume; l'altra sfera è cava, formata da un materiale molto denso, che occupa quindi solo uno strato superficiale molto sottile (guscio sferico). Le due sfere sono lasciate scivolare giù da un piano inclinato di altezza h, con attrito sufficiente a farle rotolare senza strisciare.
   A. Calcola il rapporto tra la velocità della sfera piena e la velocità della sfera cava al fondo del piano.
   B. Calcola il rapporto tra il tempo impiegato per percorrere il piano dalla sfera piena e quello impiegato dalla sfera cava.

A. Bisogna innanzi tutto ricordare che il momento di inerzia di una sfera piena è dato da $I_p = \frac{2}{5}mR^2$, mentre quello di una sfera cava è $I_c = \frac{2}{5}mR^2$. Ricordando il principio di conservazione dell'energia, ottengo che l'energia potenziale iniziale è uguale all'energia cinetica finale, dato che l'energia cinetica iniziale è nulla – le due sfere scivolano dal piano partendo da ferme – e l'energia potenziale finale è nulla, se considero nulla l'altezza raggiunta in fondo al piano inclinato.
Da quest'uguaglianza, posso determinare la velocità delle due sfere e farne il rapporto, ricordando che l'energia cinetica finale sarà data dalla somma tra l'energia cinetica di traslazione e quella di rotazione, e che $\omega R = v$:

$$U_o = K \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 \quad \Rightarrow \quad gh = \frac{7}{10}v^2 \quad \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{10\,gh}{7}}$$

$$U_o = K \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{3}mv^2 = \frac{5}{6}mv^2 \quad \Rightarrow \quad gh = \frac{5}{6}v^2 \quad \Rightarrow \quad v_c = \sqrt{\frac{6\,gh}{5}}$$

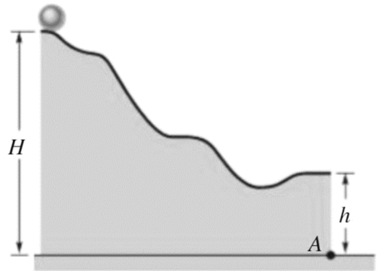
$$\frac{v_p}{v_c} = \sqrt{\frac{10\,gh}{7}} : \sqrt{\frac{6\,gh}{5}} = \sqrt{\frac{10\,gh}{7}\cdot\frac{5}{6\,gh}} = \frac{5}{\sqrt{21}} = \mathbf{1,1}$$

B. Considerando la lunghezza L del piano e il fatto che entrambe le sfere si muovono di moto uniformemente accelerato: $L = \frac{v_o + v}{2}t$, perciò, sapendo che le due sfere partono da ferme e che la velocità è quella precedentemente ricavata, ottengo:

$$t_p = \frac{2L}{v_p} \qquad t_c = \frac{2L}{v_c}$$

$$\frac{t_p}{t_c} = \frac{2L}{v_p} : \frac{2L}{v_c} = \frac{v_c}{v_p} = \frac{\sqrt{21}}{5} = \mathbf{0,92}$$

9. Una sfera omogenea, partendo da ferma dalla sommità della pista il cui profilo appare nella figura 3, rotola senza strisciare fino a cadere fuori al termine della pista. Se $H = 6{,}0\ m$ e $h = 2{,}0\ m$, e l'ultimo tratto a destra della pista è orizzontale, a quale distanza orizzontale dal punto A andrà ad atterrare?



Indico con B il punto di partenza alla sommità del profilo e con C il punto ad altezza h. Applico il principio di conservazione dell'energia:

$$U_B + K_B = U_C + K_C$$

Dato che la sfera parte da ferma, l'energia cinetica iniziale è nulla, perciò: $U_B = U_C + K_C$. Inoltre, l'energia cinetica finale è data dalla somma tra energia cinetica di rotazione e energia cinetica di rotazione:

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Ricordando che $I = \frac{2}{5}mr^2$ per una sfera omogenea e che $\omega r = v$, dato che la sfera rotola senza strisciare, posso ricavare la velocità:

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2 \qquad gH = gh + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 \qquad \frac{7}{10}v^2 = g(H-h) \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)}$$

La velocità determinata ha solo la componente orizzontale, dato che l'ultimo tratto a destra della pista è orizzontale.

Una volta lanciata oltre la pista, la sfera avrà un moto parabolico con velocità di partenza orizzontale e le sue equazioni sono: $\begin{cases} x = vt \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$, ricordando che il moto parabolico si ottiene come composizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale e un moto uniformemente accelerato in verticale, con accelerazione $a = -g$.

Determino il tempo di volo, considerando un'altezza 0 in corrispondenza del punto A del profilo:

$$\begin{cases} y = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A questo punto, considerando solo la componente orizzontale del moto, posso determinare la gittata:

$$G = vt = \sqrt{\frac{10}{7}\,g\,(H-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}h\,(H-h)} = \mathbf{4{,}8\ m}$$