Semplifica le seguenti espressioni applicando i prodotti notevoli:

1. $\{[(2^{80}-2^{79})^2+2^{157}]:2^{150}-2^7\}:2^8+3$

$=[(2^{160}-2\cdot 2^{80}\cdot 2^{79}+2^{158}+2^{157}):2^{150}-2^7]:2^8+3=$

$=[(2^{160}-2^{160}+2^{158}+2^{157}):2^{150}-2^7]:2^8+3=$

$=(2^8+2^7-2^7):2^8+3=2^8:2^8+3=1+3=\mathbf{4}$

2. $8a+(2a^2-1)(a+1)+(3a+2)(2-3a)-2a^3+7a\,(a-1)$

$=8a+2a^3+2a^2-a-1+4-9a^2-2a^3+7a^2-7a=\mathbf{3}$

3. $\left[(2x^2-x+xy)(2x^2+x-xy):(-2x^2)+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]:(-y)+\frac{1}{2}y+1$

$=\left\{[4x^4-(x-xy)^2]:(-2x^2)+2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right\}:(-y)+\frac{1}{2}y+1=$

$=\left\{[4x^4-(x^2-2x^2y+x^2y^2)]:(-2x^2)+2x^2-\frac{1}{2}\right\}:(-y)+\frac{1}{2}y+1=$

$=\left[(4x^4-x^2+2x^2y-x^2y^2):(-2x^2)+2x^2-\frac{1}{2}\right]:(-y)+\frac{1}{2}y+1=$

$=\left(-2x^2+\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}y^2+2x^2-\frac{1}{2}\right):(-y)+\frac{1}{2}y+1=1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y+1=\mathbf{2}$

4. $[(x-1)^3(x+1)^3-(x-3)^2+(x^3+2)(2-x^3)+3x^4]:(-2)+x(x+3)-2$

$=[(x^2-1)^3-(x^2-6x+9)+4-x^6+3x^4]:(-2)+x^2+3x-2=$

$=(x^6-3x^4+3x^2-1-x^2+6x-9+4-x^6+3x^4):(-2)+x^2+3x-2=$

$=(2x^2+6x-6):(-2)+x^2+3x-2=-x^2-3x+3+x^2+3x-2=\mathbf{1}$

5. $\left(\frac{1}{3}a-\frac{3}{2}b\right)^3-\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)^2\left(\frac{1}{3}a-b\right)+\frac{1}{2}b\left(a-\frac{5}{2}b\right)^2$

$=\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{2}a^2b+\frac{9}{4}ab^2-\frac{27}{8}b^3-\left(\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{1}{3}a-b\right)+\frac{1}{2}b\left(a^2-5ab+\frac{25}{4}b^2\right)=$

$=\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{2}a^2b+\frac{9}{4}ab^2-\frac{27}{8}b^3-\left(\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{9}a^2b+\frac{1}{9}a^2b-\frac{1}{3}ab^2+\frac{1}{12}ab^2-\frac{1}{4}b^3\right)+\frac{1}{2}a^2b-\frac{5}{2}ab^2+\frac{25}{8}b^3=$

$=\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{2}a^2b+\frac{9}{4}ab^2-\frac{27}{8}b^3-\frac{1}{27}a^3+\frac{1}{3}ab^2-\frac{1}{12}ab^2+\frac{1}{4}b^3+\frac{1}{2}a^2b-\frac{5}{2}ab^2+\frac{25}{8}b^3=\mathbf{0}$

6. Dato il polinomio $P(x)=x^2-x+1$, calcola l'espressione:

$$[R_1^2+(3-R_2)(3+R_2)+(3-R_3)^2-9]:(R_3+R_2)-(R_1+R_2)$$

dove R_1 è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-2)$, R_2 è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-1)$ e R_3 è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x+2)$.

Per il teorema del resto: $R_1=P(2)=2^2-2+1=3$

$R_2=P(1)=1^2-1+1=1$ $\qquad R_3=P(-2)=(-2)^2-(-2)+1=7$

Sostituisco i valori ottenuti nell'espressione:

$$[3^2+(3-1)(3+1)+(3-7)^2-9]:(7+1)-(3+1)=$$

$$=(9+8+16-9):8-4=24:8-4=3-4=\mathbf{-1}$$

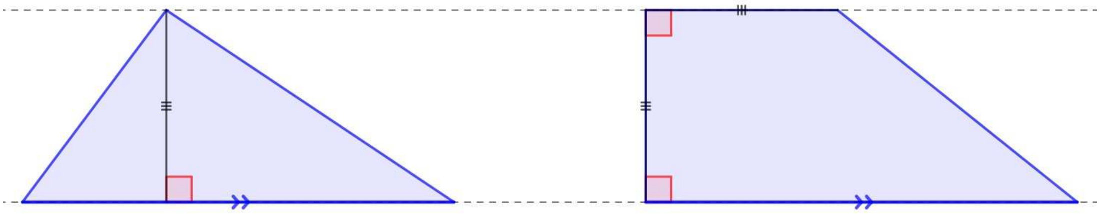
7. Siano dati due numeri a e b. Calcola il quadrato della differenza tra il loro prodotto e la loro somma. Togli da tale risultato il quadrato della somma di a con b. Verifica che quest'ultimo risultato è uguale a ciò che si ottiene semplificando l'espressione $(-a)^2[3ab\,(b-2)-6b^2]:[-(-3a)]$.

$$[ab-(a+b)]^2-(a+b)^2=a^2b^2-2ab(a+b)+(a+b)^2-(a+b)^2=\mathbf{a^2b^2-2a^2b-2ab^2}$$

$$a^2(3ab^2-6ab-6b^2):(3a)=(3a^3b^2-6a^3b-6a^2b^2):(3a)=\mathbf{a^2b^2-2a^2b-2ab^2}$$

L'uguaglianza è verificata!

8. Il triangolo in figura ha area $a^2+ab-12b^2$ e base $a+4b$, congruente alla base maggiore del trapezio rettangolo. Determina l'area del trapezio.



Determino innanzi tutto l'altezza del triangolo, ricordando che: $\mathcal{A}=\frac{1}{2}base\cdot h \quad \Rightarrow \quad h=\frac{2\mathcal{A}}{base}=\frac{2(a^2+ab-12b^2)}{a+4b}$

Applico l'algoritmo della divisione di Ruffini:

	2	$2b$	$-24\,b^2$
$-4b$		$-8b$	$24\,b^2$
	2	$-6b$	0

L'altezza del triangolo è: $2a-6b$
e coincide con l'altezza e la base minore del trapezio.
A questo punto posso determinare l'area del trapezio, ricordando che: $\mathcal{A}=\frac{1}{2}(B+b)\cdot h$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}(a+4b+2a-6b)\cdot(2a-6b)=(3a-2b)(a-3b)=\mathbf{3a^2-11ab+6b^2}$$

9. Verifica che dividendo il polinomio $2a^4-8a^2b^2-ab^3+2b^4$ per $(a-2b)$ sia rispetto alla variabile a che alla variabile b ottieni lo stesso risultato.

	2	0	$-8b^2$	$-b^3$	$2b^4$
$2b$		$4b$	$8b^2$	0	$-2b^4$
	2	$4b$	0	$-b^3$	0

Eseguendo la divisione rispetto alla variabile a, ottengo:

$Q(a)=2a^3+4a^2b-b^3 \qquad R(a)=0$

Per poter eseguire la divisione con la variabile b, devo applicare la proprietà invariantiva, dividendo sia dividendo che divisore per -2:

$$\left(-a^4+4a^2b^2+\frac{1}{2}ab^3-b^4\right):\left(-\frac{1}{2}a+b\right)$$

Riordino i polinomi rispetto a b e procedo con la divisione: $\left(-b^4+\frac{1}{2}ab^3+4a^2b^2-a^4\right):\left(b-\frac{1}{2}a\right)$

	-1	$\frac{1}{2}a$	$4a^2$	0	$-a^4$
$\frac{1}{2}a$		$-\frac{1}{2}a$	0	$2a^3$	a^4
	-1	0	$4a^2$	$2a^3$	0

Eseguendo la divisione rispetto alla variabile b, ottengo:

$Q(b)=-b^3+4a^2b+2a^3 \qquad R(b)=0$

Come si può notare: $\mathbf{Q(a)=Q(b)}$.

10. Determina quoziente e resto delle seguenti divisioni:

$$(a^6-64):(a+2) \qquad \left(\frac{1}{4}x^7+\frac{1}{2}x^6-2x^4-2\right):\left(\frac{1}{2}x^2+x+2\right)$$

Nel primo caso possiamo applicare l'algoritmo di Ruffini. Nel secondo caso, invece, devo applicare l'algoritmo generale della divisione tra polinomi:

	1	0	0	0	0	0	-64
-2		-2	4	-8	16	-32	64
	1	-2	4	-8	16	-32	0

$$(a^6-64):(a+2)=\boldsymbol{a^5-2a^4+4a^3-8a^2+16a-32}$$

$\frac{1}{4}x^7$	$\frac{1}{2}x^6$	$0x^5$	$-2x^4$	$0x^3$	$0x^2$	$0x$	-2	$\frac{1}{2}x^2+x+2$
$-\frac{1}{4}x^7$	$-\frac{1}{2}x^6$	$-x^5$						$\frac{1}{2}x^5-2x^3+8x-16$
		$-x^5$	$-2x^4$	$0x^3$	$0x^2$	$0x$	-2	
		x^5	$2x^4$	$4x^3$				
				$4x^3$	$0x^2$	$0x$	-2	
				$-4x^3$	$-8x^2$	$-16x$		
					$-8x^2$	$-16x$	-2	
					$8x^2$	$16x$	32	
							30	

$$\boldsymbol{Q(x)=\frac{1}{2}x^5-2x^3+8x-16} \qquad \boldsymbol{R(x)=30}$$

11. Calcola la potenza: $(2x-y^2)^4$.

Applicando il triangolo di Tartaglia:

$$(2x-y^2)^4=(2x)^4+4(2x)^3(-y^2)^1+6(2x)^2(-y^2)^2+4(2x)(-y^2)^3+(-y^2)^4=$$
$$=\boldsymbol{16\,x^4-32\,x^3y^2+24\,x^2y^4-8xy^6+y^8}$$

12. Calcola, senza sviluppare la potenza del binomio, il coefficiente del quarto termine di $\left(2-\frac{1}{2}x\right)^6$.

Applicando il triangolo di Tartaglia, so che i coefficienti sono, nell'ordine: $1\ \ 6\ \ 15\ \ 20\ \ 15\ \ 6\ \ 1$. Scelgo il quarto:

$$20\,(2)^3\left(-\frac{1}{2}x\right)^3 \qquad \Rightarrow \qquad 20\cdot 2^3\cdot\left(-\frac{1}{2^3}\right)=\boldsymbol{-20}$$