Semplifica le seguenti espressioni applicando i prodotti notevoli:

1. $\{[(2^{90}-2^{89})^2+2^{177}]:2^{160}-2^{17}\}:2^{18}-1$

$=[(2^{180}-2\cdot 2^{90}\cdot 2^{89}+2^{178}+2^{177}):2^{160}-2^{17}]:2^{18}-1=$

$=[(2^{180}-2^{180}+2^{178}+2^{177}):2^{160}-2^{17}]:2^{18}-1=$

$=(2^{18}+2^{17}-2^{17}):2^{18}-1=2^{18}:2^{18}-1=1-1=\mathbf{0}$

2. $6a+(3a^2+1)(a-1)+(2a+1)(1-2a)-3a^3+7a\,(a-1)+1$

$=6a+3a^3-3a^2+a-1-4a^2+1-3a^3+7a^2-7a+1=\mathbf{1}$

3. $\left[(2x^2-x+xy)(2x^2+x-xy):(-2x^2)+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]:(-y)+\frac{1}{2}y+1$

$=\left\{[4x^4-(x-xy)^2]:(-2x^2)+2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\right\}:(-y)+\frac{1}{2}y+1=$

$=\left\{[4x^4-(x^2-2x^2y+x^2y^2)]:(-2x^2)+2x^2-\frac{1}{2}\right\}:(-y)+\frac{1}{2}y+1=$

$=\left[(4x^4-x^2+2x^2y-x^2y^2):(-2x^2)+2x^2-\frac{1}{2}\right]:(-y)+\frac{1}{2}y+1=$

$=\left(-2x^2+\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}y^2+2x^2-\frac{1}{2}\right):(-y)+\frac{1}{2}y+1=1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y+1=\mathbf{2}$

4. $[(1-x)^3(x+1)^3-(3-x)^2+(x^3+2)(x^3-2)-3x^4+2x]:4+x(x-2)+6$

$=[(1-x^2)^3-(9-6x+x^2)+x^6-4-3x^4+2x]:\ 4+x^2-2x+6=$

$=(1-3x^2+3x^4-x^6-9+6x-x^2+x^6-4-3x^4+2x):4+x^2-2x+6=$

$=(-4x^2+8x-12):4+x^2-2x=-x^2+2x-3+x^2-3x+6=\mathbf{3}$

5. $\left(\frac{3}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^3-\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)^2\left(a-\frac{1}{3}b\right)-\frac{1}{2}a\,\left(\frac{5}{2}a-b\right)^2+4$

$=\frac{27}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2b+\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{27}b^3-\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2\right)\left(a-\frac{1}{3}b\right)-\frac{1}{2}a\,\left(\frac{25}{4}a^2-5ab+b^2\right)+4=$

$=\frac{27}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2b+\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{27}b^3-\left(\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{12}a^2b+\frac{1}{3}a^2b-\frac{1}{9}ab^2+\frac{1}{9}ab^2-\frac{1}{27}b^3\right)-\frac{25}{8}a^3+\frac{5}{2}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+4=$

$=\frac{1}{4}a^3-\frac{9}{4}a^2b-\frac{1}{27}b^3-\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{12}a^2b-\frac{1}{3}a^2b+\frac{1}{27}b^3+\frac{5}{2}a^2b+4=\mathbf{4}$

6. Dato il polinomio $P(x)=x^2-x+1$, calcola l'espressione:

$$[R_3^2+(3-R_1)(3+R_1)+(3-R_2)^2-9]:(R_2+R_1)-(R_3+R_1)$$

dove R_1 è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-1)$, R_2 è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x+2)$ e R_3 è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-2)$.

Per il teorema del resto: $R_1=P(1)=1^2-1+1=1$

$R_2=P(-2)=(-2)^2-(-2)+1=7$ $\quad R_3=P(2)=2^2-2+1=3$

Sostituisco i valori ottenuti nell'espressione:

$$[3^2+(3-1)(3+1)+(3-7)^2-9]:(7+1)-(3+1)=$$

$$=(9+8+16-9):8-4=24:8-4=3-4=\mathbf{-1}$$

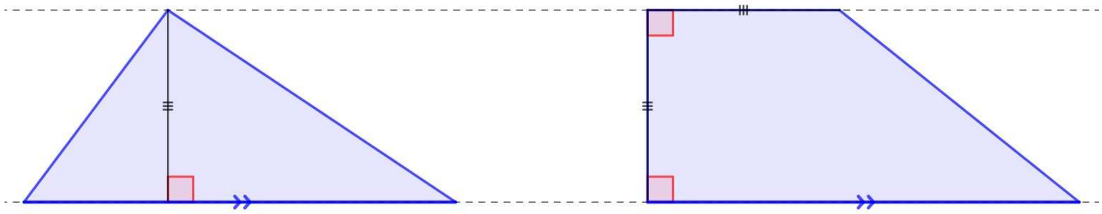
7. Siano dati due numeri a e b. Calcola il quadrato della differenza tra il loro prodotto e la loro somma. Togli da tale risultato il quadrato della somma di a con b. Verifica che quest'ultimo risultato è uguale a ciò che si ottiene semplificando l'espressione $(-a)^2[3ab\,(b-2)-6b^2]:[-(-3a)]$.

$$[ab-(a+b)]^2-(a+b)^2=a^2b^2-2ab(a+b)+(a+b)^2-(a+b)^2=\boldsymbol{a^2b^2-2a^2b-2ab^2}$$

$$a^2(3ab^2-6ab-6b^2):(3a)=(3a^3b^2-6a^3b-6a^2b^2):(3a)=\boldsymbol{a^2b^2-2a^2b-2ab^2}$$

L'uguaglianza è verificata!

8. Il triangolo in figura ha area $a^2+ab-12b^2$ e altezza $a+4b$, con la base congruente alla base maggiore del trapezio rettangolo. Determina l'area del trapezio.



Determino innanzi tutto la base del triangolo, ricordando che: $\mathcal{A}=\frac{1}{2}base\cdot h \quad\Rightarrow\quad base=\frac{2\mathcal{A}}{h}=\frac{2(a^2+ab-12b^2)}{a+4b}$

Applico l'algoritmo della divisione di Ruffini:

	2	$2b$	$-24\,b^2$
$-4b$		$-8b$	$24\,b^2$
	2	$-6b$	0

La base del triangolo è: $2a-6b$
e coincide con la base maggiore del trapezio, mentre l'altezza coincide con l'altezza e la base minore del trapezio.
A questo punto posso determinare l'area del trapezio,
ricordando che: $\mathcal{A}=\frac{1}{2}(B+b)\cdot h$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}(a+4b+2a-6b)\cdot(a+4b)=(3a-2b)\left(\frac{1}{2}a+2b\right)=\boldsymbol{\frac{3}{2}a^2+5ab-4b^2}$$

9. Verifica che dividendo il polinomio $2a^4-8a^2b^2+ab^3-2b^4$ per $(a-2b)$ sia rispetto alla variabile a che alla variabile b ottieni lo stesso risultato.

	2	0	$-8b^2$	b^3	$-2b^4$
$2b$		$4b$	$8b^2$	0	$2b^4$
	2	$4b$	0	b^3	0

Eseguendo la divisione rispetto alla variabile a, ottengo:
$Q(a)=2a^3+4a^2b+b^3 \qquad R(a)=0$

Per poter eseguire la divisione con la variabile b, devo applicare la proprietà invariantiva, dividendo sia dividendo che divisore per -2:

$$\left(-a^4+4a^2b^2-\frac{1}{2}ab^3+b^4\right):\left(-\frac{1}{2}a+b\right)$$

Riordino i polinomi rispetto a b e procedo con la divisione: $\left(b^4-\frac{1}{2}ab^3+4a^2b^2-a^4\right):\left(b-\frac{1}{2}a\right)$

	1	$-\frac{1}{2}a$	$4a^2$	0	$-a^4$
$\frac{1}{2}a$		$\frac{1}{2}a$	0	$2a^3$	a^4
	1	0	$4a^2$	$2a^3$	0

Eseguendo la divisione rispetto alla variabile b, ottengo:
$Q(b)=b^3+4a^2b+2a^3 \qquad R(b)=0$

Come si può notare: $\boldsymbol{Q(a)=Q(b)}$.

10. Determina quoziente e resto delle seguenti divisioni:

$$\left(\frac{1}{4}x^7-\frac{1}{2}x^6+2x^4-2\right):\left(\frac{1}{2}x^2-x+2\right) \qquad\qquad (a^6-64):(a+2)$$

Nel primo caso non abbiamo altra scelta se non quella di applicare l'algoritmo generale della divisione tra polinomi. Nel secondo caso, invece, possiamo applicare l'algoritmo di Ruffini:

$\frac{1}{4}x^7$	$-\frac{1}{2}x^6$	$0x^5$	$2x^4$	$0x^3$	$0x^2$	$0x$	-2	$\frac{1}{2}x^2-x+2$
$-\frac{1}{4}x^7$	$\frac{1}{2}x^6$	$-x^5$						$\frac{1}{2}x^5-2x^3+8x+16$
		$-x^5$	$2x^4$	$0x^3$	$0x^2$	$0x$	-2	
		x^5	$-2x^4$	$4x^3$				
				$4x^3$	$0x^2$	$0x$	-2	
				$-4x^3$	$8x^2$	$-16x$		
					$8x^2$	$-16x$	-2	
					$-8x^2$	$16x$	-32	
							-34	

$$\boldsymbol{Q(x)=\frac{1}{2}x^5-2x^3+8x+16} \qquad\qquad \boldsymbol{R(x)=-34}$$

	1	0	0	0	0	0	-64
-2		-2	4	-8	16	-32	64
	1	-2	4	-8	16	-32	0

$$(a^6-64):(a+2)=\boldsymbol{a^5-2a^4+4a^3-8a^2+16a-32}$$

11. Calcola la potenza: $(x^2-2y)^4$.

Applicando il triangolo di Tartaglia:

$$(x^2-2y)^4=(x^2)^4+4(x^2)^3(-2y)^1+6(x^2)^2(-2y)^2+4(x^2)(-2y)^3+(-2y)^4=$$
$$=\boldsymbol{x^8-8x^6y+24x^4y^2-32x^2y^3+16y^4}$$

12. Calcola, senza sviluppare la potenza del binomio, il coefficiente del quarto termine di $\left(3-\frac{1}{3}x\right)^6$.

Applicando il triangolo di Tartaglia, so che i coefficienti sono, nell'ordine: $1\;\;6\;\;15\;\;20\;\;15\;\;6\;\;1$. Scelgo il quarto:

$$20\,(3)^3\left(-\frac{1}{3}x\right)^3 \qquad \Rightarrow \qquad 20\cdot 3^3\cdot\left(-\frac{1}{3^3}\right)=\boldsymbol{-20}$$