

1. A quale altezza da Terra il peso di una persona diventa la metà di quello che ha sulla superficie terrestre?

$$r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Sia h la distanza dalla Terra in cui il peso di una persona è la metà di quello che ha sulla superficie terrestre, ovvero: $F_h = \frac{1}{2}P$

Applicando la legge di gravitazione universale:

$$G \frac{mM_T}{(r+h)^2} = \frac{1}{2} G \frac{mM_T}{r^2} \quad 2r^2 = (r+h)^2 \quad r\sqrt{2} = r+h \quad h = r(\sqrt{2}-1) = \mathbf{2,64 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

2. Un satellite ruota su un'orbita circolare di raggio $5 \cdot 10^4 \text{ km}$ con una velocità orbitale di 10^4 m/s . Calcola la massa del pianeta.

$$r = 5 \cdot 10^4 \text{ km} \quad v = 10^4 \text{ m/s} \quad M_P?$$

Visto che il satellite ruota su un'orbita circolare, la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal pianeta è di fatto una forza centripeta, perciò:

$$G \frac{mM_P}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad M_P = \frac{v^2 r}{G} = \mathbf{7,5 \cdot 10^{25} \text{ kg}}$$

3. Quale sarebbe il peso di un astronauta di 59 kg su un pianeta che ha la stessa densità della Terra, ma raggio doppio?

$$d = d_T \quad R = 2R_T \quad m = 59 \text{ kg} \quad M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \quad P?$$

La massa è data dal prodotto tra densità e volume, perciò la massa del pianeta è:

$$M = d \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = d_T \cdot \frac{4}{3} \pi (2R_T)^3 = 8 \cdot d_T \cdot \frac{4}{3} \pi R_T^3 = 8M_T$$

Determiniamo la forza peso dell'astronauta come forza di attrazione gravitazionale:

$$F = G \frac{mM}{R^2} = G \frac{m \cdot 8M_T}{(2R)^2} = 2 G \frac{mM_T}{R^2} = \mathbf{1,16 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

4. Su un pianeta lontano, una biglia impiega $1,13 \text{ s}$ per raggiungere il suolo, cadendo da un'altezza di $2,5 \text{ m}$. Sapendo che il raggio del pianeta è $5,43 \cdot 10^6 \text{ m}$, si può determinare il valore della massa del pianeta. Qual è?

$$t = 1,13 \text{ s} \quad h = 2,5 \text{ m} \quad R = 5,43 \cdot 10^6 \text{ m} \quad M?$$

Sapendo che il moto di caduta è un moto rettilineo uniformemente accelerato con partenza da fermo. Per determinarne l'accelerazione di gravità, usiamo la legge oraria:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad g = \frac{2h}{t^2}$$

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{mM}{R^2}}{m} = G \frac{M}{R^2} \Rightarrow \frac{2h}{t^2} = G \frac{M}{R^2} \Rightarrow M = \frac{2hR^2}{Gt^2} = \mathbf{1,73 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

5. Supponi che si sia osservato che tre oggetti astronomici (1, 2 e 3) sono allineati e che la distanza tra l'oggetto 1 e l'oggetto 3 è D . Sapendo che l'oggetto 1 ha quattro volte la massa dell'oggetto 3 e sette volte la massa dell'oggetto 2, determina la distanza tra l'oggetto 1 e l'oggetto 2 per la quale la forza risultante sull'oggetto 2 è uguale a zero.

$$m_1 = 4m \quad m_2 = \frac{4}{7}m \quad m_3 = m$$

Perché la forza risultante sia uguale a zero, le due forze, l'una dovuta alla massa 1 e l'altra dovuta alla massa 3, devono essere uguali in modulo. Dovendo essere opposte per il verso, la massa 2 non può che trovarsi tra le due masse 1 e 3, visto che la forza gravitazionale è attrattiva:

$$G \frac{m_1 m_2}{x^2} = G \frac{m_2 m_3}{(D-x)^2} \quad \frac{4m \cdot \frac{4}{7}m}{x^2} = \frac{\frac{4}{7}m \cdot m}{(D-x)^2}$$

$$4(D-x)^2 = x^2 \quad 2(D-x) = x$$

$$2D - 2x = x \quad 3x = 2D \quad \mathbf{x = \frac{2}{3}D}$$



6. La luna marziana Deimos ha un periodo orbitale che è maggiore di quello dell'altra luna di Marte, Phobos. Entrambe le lune hanno approssimativamente orbite circolari.
- A. Deimos è più vicino o più lontano da Marte rispetto a Phobos? Giustifica la tua risposta.
- B. Calcola la distanza di Deimos dal centro di Marte, sapendo che il suo periodo è $1,10 \cdot 10^5$ s.

$$M = 0,642 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

- A. Per la terza legge di Keplero, il rapporto tra il cubo dell'asse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo è costante. Ciò significa che l'asse maggiore è direttamente proporzionale alla radice cubica del quadrato del periodo: aumentando il periodo, quindi, aumenta anche l'asse maggiore, perciò visto che Deimos ha un periodo orbitale maggiore di Phobos, avrà anche una distanza maggiore da Marte.
- B. Calcoliamo questa distanza, ricordando che la forza di attrazione gravitazionale corrisponde alla forza centripeta, che vincola le lune a muoversi nell'orbita di Marte:

$$G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad GM = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3 \quad R = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 GM} = 2,36 \cdot 10^7 \text{ m}$$

7. Quale raggio dovrebbe avere il Sole per diventare un buco nero?

$$M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Nel caso in cui poniamo l'energia meccanica totale uguale a zero, possiamo determinare la velocità di fuga, che per rendere il Sole un buco nero, deve essere pari a quella della luce (in realtà superiore, visto che dal buco nero non riesce a uscire nemmeno la luce). Poniamo quindi uguali il modulo dell'energia potenziale e quello dell'energia cinetica:

$$G \frac{mM}{R} = \frac{1}{2} mc^2 \quad R = \frac{2GM}{c^2} = 2,95 \text{ km}$$

8. Il peso di un oggetto è lo stesso su due pianeti diversi. La massa del pianeta A è il 70% di quella del pianeta B. Trova il rapporto tra i raggi dei pianeti.

$$P_A = P_B \quad M_A = \frac{70}{100} M_B \quad \frac{R_A}{R_B} ?$$

Il peso è di fatto la forza di attrazione gravitazionale. Poniamo quindi le due forze uguali e sostituiamo, alla massa del pianeta A, il suo valore in funzione della massa del pianeta B:

$$G \frac{mM_A}{R_A^2} = G \frac{mM_B}{R_B^2} \quad \frac{\frac{70}{100} M_B}{R_A^2} = \frac{M_B}{R_B^2} \quad \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 = \frac{70}{100} \quad \frac{R_A}{R_B} = \sqrt{\frac{70}{100}} = 0,84$$

(Calcolare il rapporto tra il raggio del pianeta B e quello del pianeta A sarebbe stato comunque corretto, visto che il testo non specifica quale sia il rapporto da calcolare. In tal caso, avremmo ottenuto 1,2).

9. A una quota H sopra la superficie di un pianeta, il peso di una sonda è del 2% inferiore al suo peso sulla superficie. Il raggio del pianeta è R . Trova il rapporto H/R .

$$P_H = \frac{98}{100} P_R \quad \frac{H}{R} ?$$

Nella relazione $P_H = \frac{98}{100} P_R$ sostituisco al posto dei pesi le forze di attrazione gravitazionali, l'una all'altezza H , l'altra a livello della superficie del pianeta:

$$G \frac{mM}{(R+H)^2} = \frac{98}{100} G \frac{mM}{R^2} \quad \left(\frac{R+H}{R}\right)^2 = \frac{100}{98} \quad \left(1 + \frac{H}{R}\right)^2 = \frac{100}{98}$$

$$1 + \frac{H}{R} = \sqrt{\frac{100}{98}} \quad \frac{H}{R} = \sqrt{\frac{100}{98}} - 1 = 0,010$$

10. Un satellite per telecomunicazioni di 1500 kg ruota attorno alla Terra su un'orbita geostazionaria. Calcola la sua energia potenziale gravitazionale e la sua energia totale.

$$m = 1500 \text{ kg} \quad M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \quad T = 24 \text{ h} \quad U? \quad E?$$

Innanzitutto, dobbiamo determinare la distanza R+H del satellite dal centro della Terra, sapendo che la sua orbita è geostazionaria, ovvero che il suo periodo di rivoluzione è di 24 h, considerando la forza di attrazione gravitazionale come la forza centripeta che vincola il satellite a ruotare attorno alla Terra:

$$G \frac{mM}{(R+H)^2} = m \frac{v^2}{R+H} \quad (1) \quad G \frac{M}{R+H} = \left(\frac{2\pi(R+H)}{T} \right)^2 \quad R+H = \sqrt[3]{GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2}$$

Determiniamo quindi l'energia potenziale:

$$U = -G \frac{mM}{R+H} = -m \frac{GM}{\sqrt[3]{GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2}} = -m \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi GM}{T} \right)^2} = -1,41 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

L'energia cinetica è data da: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Possiamo ricavare la velocità dalla relazione (1): $v^2 = \frac{GM}{R+H}$ $K = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R+H} = -\frac{1}{2}U$

Perciò l'energia meccanica è data da:

$$E = U + K = U - \frac{1}{2}U = \frac{1}{2}U = -7,07 \cdot 10^9 \text{ J}$$

11. La velocità di fuga dalla superficie di Urano è 21,2 km/s. Calcola la massa di Urano.

$$R = 25,362 \cdot 10^6 \text{ m} \quad v = 21,2 \text{ km/s} \quad M?$$

Nel caso in cui poniamo l'energia meccanica totale uguale a zero, possiamo determinare la velocità di fuga. Poniamo, quindi, l'energia potenziale uguale all'opposto dell'energia cinetica per determinare la massa di Urano:

$$G \frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 \quad M = \frac{v^2 R}{2G} = 8,54 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

12. Su Venere l'accelerazione di gravità all'altezza del suolo vale 8,87 m/s². Calcola la velocità di fuga dalla superficie del pianeta.

$$g = 8,87 \text{ m/s}^2 \quad 6,052 \cdot 10^6 \text{ m} \quad v?$$

Per determinare l'accelerazione di gravità, faccio il rapporto tra la forza di attrazione gravitazionale all'altezza del suolo per un oggetto di massa m e la massa m dell'oggetto usato come massa di prova:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G \frac{mM}{R^2}}{m} = G \frac{M}{R^2}$$

Ponendo l'energia meccanica totale uguale a zero, possiamo determinare la velocità di fuga:

$$G \frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 \quad v = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} = \sqrt{2 \frac{GM}{R^2} \cdot R} = \sqrt{2gR} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

13. Confronta le intensità del campo gravitazionale della Terra e di quello del Sole nella zona in cui si trova la Luna.

$$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad d_{TL} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m} \quad M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad d_{TS} = 0,1496 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Il campo gravitazionale è dato dal rapporto tra la forza di attrazione gravitazionale subita da una massa qualsiasi e la massa, perciò:

$$g_T = G \frac{M_T}{d_{TL}^2} \quad g_S = G \frac{M_S}{d_{TS}^2}$$

Come distanza tra la Luna e il Sole, possiamo considerare con buona approssimazione, la distanza tra la Terra e il Sole, perciò:

$$\frac{g_S}{g_T} = \frac{M_S}{d_{TS}^2} \cdot \frac{d_{TL}^2}{M_T} = 2,2$$