1. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento AB con A (1; 0) e B (3; 2).

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Posso trovare le coordinate del centro, che è il punto medio del segmento AB e la lunghezza del raggio, che è metà del diametro:

$$C\left(\frac{1+3}{2};\frac{0+2}{2}\right)=C\ (2;1) \qquad r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\mathscr{C}\ (x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$$

$$x^2+y^2-4x-2y+3=0$$

2. Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in (1; 3) e tangente alla retta *t* di equazione: $4x-5y+1=0$.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino il raggio, calcolando la distanza del centro dalla retta tangente:

$$r=d\ (C;t)=\frac{|4-15+1|}{\sqrt{16+25}}=\frac{10}{\sqrt{41}}$$

$$\mathscr{C}\ (x-1)^2+(y-3)^2=\left(\frac{10}{\sqrt{41}}\right)^2$$

$$41x^2+41y^2-82x-246y+310=0$$

3. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per A (1; 4) e B (-2; 1) e avente il centro C sulla retta $3x-y+4=0$. Determina inoltre l'area del triangolo ABC.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino l'asse del segmento AB. Dalla sua intersezione con la retta data, trovo il centro C:

$$a_{\overline{AB}}:(x-1)^2+(y-4)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \qquad a_{\overline{AB}}:x+y-2=0$$

$$C\ \begin{cases}x+y-2=0\\3x-y+4=0\end{cases}$$
$$\overline{4x\qquad +2=0} \qquad C\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Determino quindi il raggio: $r=\overline{CA}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$$\mathscr{C}\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2+x-5y+2=0$$

Dalla figura sembra che i tre punti siano allineati. Verifico, quindi, l'allineamento: $\frac{-\frac{1}{2}-1}{-2-1}=\frac{\frac{5}{2}-4}{1-4}\ \Rightarrow\ -\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$.

I tre punti sono allineati, perciò l'area del triangolo ABC è pari a 0.

4. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per il punto (6; 4) e avente centro in (3; 0).

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino il raggio come distanza del centro dal punto dato: $r = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = 5$

$$\mathscr{C}\ (x-3)^2 + (y-0)^2 = (5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$$

5. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo inscritto nella circonferenza di centro C (1; 1) e raggio √10 avente un lato sulla retta x – 2 y + 6 = 0.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino innanzi tutto l'equazione della circonferenza, avendo tutti gli elementi:

$$\mathscr{C}\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$$

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione della retta contenente il lato del rettangolo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y^2 - 24y + 36 + y^2 - 4y + 12 - 2y - 8 = 0 \\ x = 2y - 6 \end{cases}$$

A (- 2; 2) B (2; 4)

Determino la retta perpendicolare alla retta data e passante per B: $s: y - 4 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 8$

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione della retta s:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x^2 - 32x + 64 - 2x + 4x - 16 - 8 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases}$$

B (2; 4) C (4; 0)

Siccome devo determinare perimetro e area del rettangolo, non mi serve il quarto vertice D. Mi basta determinare la lunghezza di AB e di BC:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5} \qquad \overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

Il rettangolo è un quadrato, perciò: $2p = 8\sqrt{5} \qquad A = 20$

6. Dato il quadrato ABCD di vertici A (-1; 2), B (4; 2), C (4; 7) e D (-1; 7), scrivi le equazioni delle circonferenze inscritta e circoscritta.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Per entrambe le circonferenze, il centro è dato dal punto d'incontro delle diagonali del quadrato, ovvero dal loro punto medio:

$$C'\left(\frac{-1+4}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = C'\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Nel caso della circonferenza circoscritta, il raggio è dato dalla distanza del centro da uno dei vertici del quadrato:

$$r = \overline{AC'} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-2\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Perciò l'equazione della circonferenza diventa:

$$\mathscr{C}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 9y + 10 = 0$$

Nel caso della circonferenza inscritta, il raggio è dato dalla metà del lato del quadrato:

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{|4+1|}{2} = \frac{5}{2}$$

Perciò l'equazione della circonferenza diventa:

$$\mathscr{C}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 - 12x - 36y + 65 = 0$$

7. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici A (1; -1), B (3; 1) e C (-1; 3) è isoscele, scrivi l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Verifico che è un triangolo isoscele:

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5} \text{ e } \overline{BC} = \sqrt{(3+1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

Per determinare la circonferenza, calcolo il centro facendo l'intersezione fra l'asse del lato AB e l'asse del segmento BC:

$$a_{\overline{AB}}: (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \qquad a_{\overline{AB}}: x + y - 2 = 0$$

$$a_{\overline{BC}}: (x-3)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \qquad a_{\overline{BC}}: 2x - y = 0$$

$$C\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$
$$3x \quad - 2 = 0$$

$$C\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Determino il raggio come distanza tra il centro e uno dei vertici del triangolo, A:

$$r = \sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-1-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{49}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$$

Possiamo determinare l'equazione della circonferenza:

$$\mathscr{C}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\sqrt{2}\right)^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 4x - 8y - 10 = 0$$