8. Dopo aver determinato i punti A e B d'intersezione tra la circonferenza avente per centro l'origine e raggio uguale a 2 con la bisettrice del 1° e 3° quadrante, detto C uno dei due punti d'intersezione con l'asse y, determina l'area del triangolo ABC.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino l'equazione della circonferenza di centro O (0; 0) e raggio uguale a 2:

$$\mathscr{C}\ (x-0)^2+(y-0)^2=(2)^2 \qquad x^2+y^2=4$$

Considerata l'equazione della bisettrice di 1° e 3° quadrante, x = y, calcolo le sue intersezioni con la circonferenza, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2=4 \\ y=x \end{cases} \qquad A(\sqrt{2};\sqrt{2}) \quad B(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$$

Considero, come intersezione della circonferenza con l'asse y, il punto C (0; 2).

Determino l'area del triangolo:

$$A=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}[-2+0-2\sqrt{2}-(0+2\sqrt{2}-2)]\right| = 2\sqrt{2}$$

9. Assegnata la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ e la retta *r* di equazione y = x, determina il centro P_0 della circonferenza e i punti P_1 e P_2 d'intersezione di r con la circonferenza. Trova l'area del triangolo $P_0P_1P_2$.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino il centro della circonferenza: P_0 (1; 2)

Determino le coordinate dei punti di intersezione tra retta e circonferenza, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-20=0 \\ y=x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x^2-2x-4x-20=0 \\ y=x \end{cases}$$

P_1 (-2; -2) P_2 (5; 5)

Determino l'area del triangolo:

$$A=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}[-2+10-10-(-10-4+5)]\right| = \frac{7}{2}$$

10. Scrivi l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla retta 3x – y = 0 e passante per $P\left(0; -\frac{53}{13}\right)$

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino la perpendicolare alla tangente, passante per l'origine: x + 3y = 0.

Determino l'equazione dell'asse del segmento PO. Essendo entrambi sull'asse y, l'asse è parallelo all'asse x e passa per il punto medio di OP:

$$y = -\frac{53}{26}$$

Determinando il punto di intersezione tra le due rette, trovo il centro della circonferenza:

$$C \begin{cases} x + 3y = 0 \\ y = -\dfrac{53}{26} \end{cases} \qquad C\left(\frac{159}{26}; -\frac{53}{26}\right)$$

Non ho bisogno di determinare il raggio, perché, sapendo che la circonferenza passa per l'origine, il coefficiente c dell'equazione generica è nullo:

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2} = \dfrac{159}{26} \\ -\dfrac{b}{2} = -\dfrac{53}{26} \end{cases} \qquad \mathscr{C}: \; x^2 + y^2 - \frac{159}{13}x + \frac{53}{13}y = 0$$

11. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per tangente nell'origine la bisettrice del 2° e 4° quadrante e tangente alla retta x = 2y – 5.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Il centro è equidistante dalle due rette date, inoltre si trova sulla bisettrice di 1° e 3° quadrante, ovvero la perpendicolare alla bisettrice di 2° e 4° quadrante passante per l'origine degli assi. Per questo motivo, il centro ha coordinate (*a; a*). Ponendo l'uguaglianza della distanza di C dalle rette, otterrò il valore di a:

$$\frac{|a - 2a + 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|a + a|}{\sqrt{2}} \qquad -a\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \pm 2a\sqrt{5}$$

Determinerò l'equazione di due circonferenze, simmetriche rispetto all'origine:

$$-a\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 2a\sqrt{5} \qquad a\,(2\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$$

$$a = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{5\,(\sqrt{10} - 1)}{9}$$

$$\mathscr{C}_1: \; x^2 + y^2 + \frac{10}{9}(1 - \sqrt{10})\,(x + y) = 0$$

$$-a\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = -2a\sqrt{5} \qquad a\,(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$$

$$a = \frac{-5\sqrt{2}}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}} = -\frac{5\,(\sqrt{10} + 1)}{9}$$

$$\mathscr{C}_2: \; x^2 + y^2 + \frac{10}{9}(1 + \sqrt{10})\,(x + y) = 0$$

12. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$, sia D il suo centro. Le tangenti condotte dall'origine O toccano la circonferenza in A e B. Trova l'equazione della circonferenza passante per O, A, B dopo aver verificato che ha per diametro OD.
(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Il centro ha coordinate D (4; 2). Determino inoltre la lunghezza del raggio della circonferenza:

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{16 + 4 - 10} = \sqrt{10}$$

La generica retta passante per l'origine, y = mx, avrà distanza √10 dal centro della circonferenza:

$$\frac{|2 - 4m|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad 4 - 16m + 16m^2 = 10 + 10m^2 \quad \Rightarrow \quad 6m^2 - 16m - 6 = 0$$

Risolvendo l'equazione, determino i due valori di m e determino le due tangenti che sono: $y = 3x$ e $y = -\frac{1}{3}x$.

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione delle tangenti, per determinare le coordinate dei due punti A e B:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \\ y = 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 9x^2 - 8x - 12x + 10 = 0 \\ y = 3x \end{cases}$$

A (1; 3)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} 9y^2 + y^2 + 24y - 4y + 10 = 0 \\ x = -3y \end{cases}$$

B (3; -1)

Siccome OA ⊥ OB, ma AD ⊥ OA e BD ⊥ OB, perché il raggio condotto nel punto di tangenza è sempre perpendicolare alla tangente, perciò AD ⊥ BD, quindi in realtà si tratta di un rettangolo, per la precisione di un quadrato, dato che ha quattro angoli retti e, sicuramente, OA = OB, dato che i segmenti delle tangenti condotte da un punto esterno alla circonferenza sono congruenti.
Essendo un quadrato, la circonferenza passante per O, A, B passerà anche per D. Tale circonferenza ha per diametro OD e quindi il centro di questa nuova circonferenza coincide con il punto medio di OD, C (2; 1) e non è necessario determinare il raggio, perché la circonferenza passa per l'origine e il coefficiente c dell'equazione è nullo, mentre:

$$-\frac{a}{2} = 2 \quad \wedge \quad -\frac{b}{2} = 1 \qquad\qquad ✐\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

13. Determina l'equazione della circonferenza tangente nel punto A (4; 1) alla retta di equazione r: 3x – 4y – 8 = 0 e passante per B (5; 3). Verifica che la circonferenza è tangente all'asse y nel punto (0; 3)
(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino l'asse del segmento AB e l'equazione della retta s perpendicolare a r in A: dalla loro intersezione trovo le coordinate del centro della circonferenza.

$$a_{\overline{AB}}: (x-4)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 \qquad a_{\overline{AB}}: 2x + 4y - 17 = 0$$

$$m_r = \frac{3}{4} \qquad s: y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 4) \qquad 4x + 3y - 19 = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 19 = 0 \\ 2x + 4y - 17 = 0 \end{cases} \qquad C\left(\frac{5}{2}; 3\right)$$

Determino il raggio della circonferenza pari al segmento CA: $r = \overline{CA} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 4\right)^2 + (3-1)^2} = \frac{5}{2}$

$$\mathscr{C}: \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 = 0$$

Verifico che la circonferenza è tangente all'asse y nel punto (0; 3), determinando l'intersezione tra la circonferenza e l'asse y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (0;\ 3)$$

E siccome l'equazione risolvente ha $\Delta = 0$, l'asse y è tangente alla circonferenza.