14. Determina l'equazione della circonferenza che passa per i punti A (1; 1), B (1; 7), D (8; 8) e le equazioni delle tangenti alla circonferenza passanti per l'origine.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Determino gli assi dei segmenti AB e AD.
Siccome A e B hanno la stessa ascissa, l'asse di questo segmento è parallelo all'asse y e ha equazione y = 4.
Siccome A e D si trovano sulla bisettrice di 1° e 3° quadrante, l'asse di questo segmento è parallelo alla bisettrice di 2° e 4° quadrante.

$$a_{\overline{AD}}: \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-8)^2 + (y-8)^2 \qquad\qquad a_{\overline{AD}}: \ x + y - 9 = 0$$

Determino le coordinate del centro, intersecando le due rette:

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

C (5; 4)

Determino il raggio, come distanza AC: $r = \overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$

$$\mathscr{C} \ (x-5)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \qquad x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$$

Considero il fascio di rette con centro nell'origine: y = mx. Pongo la distanza della generica retta dal centro pari al raggio:

$$\frac{|5m-4|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \quad \Rightarrow \quad 25m^2 - 40m + 16 = 25m^2 + 25 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{9}{40}$$

La prima tangente ha equazione $y = -\frac{9}{40}x$, mentre la seconda è l'asse y $x = 0$. (per questo il valore m non è risultato dalla precedente equazione)

15. Determina l'equazione della tangente nel punto A (-2; 1) alla circonferenza $x^2 + y^2 = 5$. Trova inoltre le coordinate dei punti P e Q in cui questa tangente incontra la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0$ e verifica che le tangenti a questa circonferenza in P e Q sono perpendicolari tra loro.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Il centro della circonferenza coincide con l'origine degli assi cartesiani. Determino il coefficiente angolare del raggio AO. La tangente in A sarà perpendicolare a tale raggio, quindi avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco di AO e sarà passante per A:

$$m_{\overline{AO}} = -\frac{1}{2} \qquad y - 1 = 2\,(x+2) \qquad 2x - y + 5 = 0$$

Determino i punti P e Q mettendo a sistema la retta con la circonferenza:

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x + 5 \\ x^2 + 4x^2 + 20x + 25 - 6x - 24x - 60 + 35 = 0 \end{cases}$$

$$P\,(0; 5) \qquad Q\,(2; 9)$$

Per verificare che le tangenti in P e in Q a questa circonferenza sono perpendicolari tra loro, è sufficiente verificare che sono perpendicolari tra loro i raggi CP e CQ. Il centro C della circonferenza è C (3; 6).

$$m_{\overline{CP}} = \frac{6-5}{3-0} = \frac{1}{3} \qquad\qquad m_{\overline{CQ}} = \frac{6-9}{3-2} = -3$$

I due raggi sono perpendicolari tra loro, quindi le tangenti in P e in Q sono perpendicolari a loro volta tra loro.

16. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e la retta r: $2x - y + 1 = 0$, calcola le coordinate dei punti di intersezione A e B. Scrivi le equazioni delle perpendicolari a r nei punti A e B e, indicate con C e D le ulteriori intersezioni di tali perpendicolari con la circonferenza, calcola l'area del quadrilatero ABCD.

(L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas, ISBN 88-451-7709-2)

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione della retta r, per determinare le coordinate di A e B:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$A\,(0;1) \qquad B\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

Determino le equazioni delle rette perpendicolari a r ($m_r = 2$), passanti per A e per B:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x \qquad x + 2y - 2 = 0$$

$$y + \frac{3}{5} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{5}\right) \qquad x + 2y + 2 = 0$$

Determino le intersezioni di queste rette con la circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y^2 - 8y + 4 + y^2 = 1 \\ x = -2y + 2 \end{cases}$$

Sapendo che uno dei due punti è A, l'altro avrà coordinate: $D\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y^2 + 8y + 4 + y^2 = 1 \\ x = -2y - 2 \end{cases}$$

Sapendo che uno dei due punti è B, l'altro avrà coordinate: $C\,(0; -1)$.

Dato che i punti A e B appartengono alla stessa retta e i punti C e D si trovano su due perpendicolari, ma sulla stessa circonferenza, ABCD è un rettangolo. Per determinarne l'area, basta quindi la misura di due lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(0 + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$A = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{8}{5}$$

17. Determina i punti di intersezione tra la retta r : x + y + 2 = 0 e la circonferenza $x^2 + y^2 – 4 = 0$.

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione della retta r, per determinare le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ (-y-2)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ y^2 + 4y + 4 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y - 2 \\ 2y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \begin{cases} x = -y - 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y - 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \end{matrix} \right. \qquad \begin{matrix} A(-2;0) \\ B(0;-2) \end{matrix}$$

18. Trova i punti di intersezione tra la circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ e gli assi cartesiani.

Metto a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione prima dell'asse x e poi dell'asse y, per determinare le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{1} \Rightarrow$$

$$A(1;0) \qquad B(3;0)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-3}}{1} \Rightarrow$$

$$\textit{non ci sono punti in comune con l'asse } y$$

19. Scrivi l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 – 2x + 4y + 1 = 0$ nel punto P (3; – 2)

Determino il coefficiente angolare del raggio CP, dopo aver determinato le coordinate del centro C della circonferenza:

$$C(1;-2) \Rightarrow m_{\overline{CP}} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{-2+2}{3-1} = 0$$

Siccome la retta CP è parallela all'asse x, la tangente alla circonferenza in P sarà la retta passante per P e parallela all'asse y, ovvero:

$$x = 3$$