20. Scrivi le equazioni delle tangenti condotte dal punto A (2; –4) alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Considero la generica retta passante per A e pongo la distanza di tale retta dal centro della circonferenza uguale al raggio della stessa:

$$C\ (2;1) \qquad r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Equazione della generica retta passante per A: $y + 4 = m\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad t:\ mx - y - 2m - 4 = 0$

$$d\ (t; C) = r \quad \Rightarrow \quad \frac{|2m - 1 - 2m - 4|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad 5 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

$$25 = 5\cdot(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad 5 = m^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2$$

Ovvero le equazioni delle due rette tangenti sono:

$$y = 2x - 8 \qquad y = -2x$$

21. Sia data la circonferenza di centro (3; 0), passante per l'origine degli assi. Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza passanti per P (9; 0) .

La circonferenza di centro (3; 0) e passante per l'origine degli assi ha equazione:

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x = 0$$

Verifichiamo innanzi tutto che il punto P non si trova sulla circonferenza, sostituendo le coordinate di P nell'equazione della circonferenza:

$$9^2 + 0^2 - 6\cdot 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P \notin \text{ circonferenza}$$

Considero la generica retta passante per P e pongo la distanza di tale retta dal centro della circonferenza uguale al raggio della stessa:

$$C\ (3;0) \qquad r = 3$$

Equazione della generica retta passante per P: $y = m\,(x-9) \quad \Rightarrow \quad t:\ mx - y - 9m = 0$

$$d\ (t; C) = r \quad \Rightarrow \quad \frac{|3m - 0 - 9m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \quad \Rightarrow \quad |-6m| = 3\cdot\sqrt{m^2+1}$$

$$|-2m| = \sqrt{m^2+1} \quad \Rightarrow \quad 4m^2 = m^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ovvero le equazioni delle due rette tangenti sono:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-9) \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-9)$$

22. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 56 = 0$, determina l'equazione della retta tangente nel punto M (8; 6), dopo aver verificato che M si trova sulla circonferenza data.

Verifichiamo innanzi tutto che il punto M si trova sulla circonferenza, sostituendo le coordinate di M nell'equazione della circonferenza:

$$8^2 + 6^2 - 10 \cdot 8 + 6 \cdot 6 - 56 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad M \in \text{ circonferenza}$$

Determino il coefficiente angolare del raggio CM, dopo aver determinato le coordinate del centro C della circonferenza:

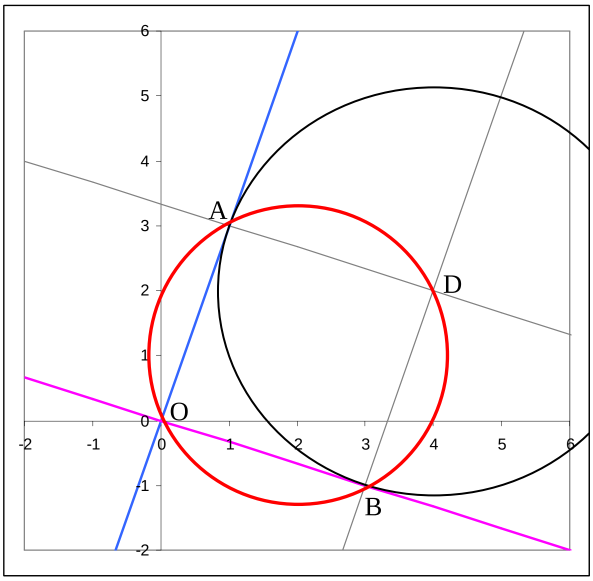
$$C\,(5; -3) \qquad \Rightarrow \qquad m_{\overline{CM}} = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{8+3}{6-5} = 11$$

La retta tangente passante per M avrà coefficiente angolare pari all'antireciproco del coefficiente angolare del raggio CM:

$$y - 6 = -\frac{1}{11}(x - 8) \qquad \Rightarrow \qquad x + 11y - 74 = 0$$

23. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ sia D il suo centro. Le tangenti condotte dall'origine O toccano la circonferenza in A e B. Trovare l'equazione della circonferenza passante per O, A, B dopo aver verificato che ha per diametro OD.

Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas



Essendo la circonferenza data di raggio $r = \sqrt{10}$ e avente centro $D\,(4; 2)$. Impongo la distanza di D dalla generica retta $y = mx$ pari a $r = \sqrt{10}$ e ottengo l'equazione $3m^2 - 8m - 3 = 0$, da cui ricavo le due rette: $y = 3x$ e $y = -\frac{1}{3}x$. Queste due rette, intersecate con la circonferenza, determinano le coordinate dei punti A e B: $A\,(1; 3)$ $B\,(3; -1)$.

Dalle due rette tangenti ottenute, si vede che $\overline{AO} \perp \overline{OB}$ e, visto che AO è tangente alla circonferenza di centro D, $\overline{AO} \perp \overline{AD}$ e, analogamente, $\overline{BO} \perp \overline{BD}$. Perciò il quadrilatero OBDA è un rettangolo e la sua diagonale OD coincide con il diametro. Perciò la nuova circonferenza da determinare ha $r = \frac{\overline{OD}}{2} = \sqrt{5}$ e ha centro $M_{OD} = \left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+2}{2}\right) = (2; 1)$ e, quindi, equazione: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

24. *Determinare l'equazione della circonferenza tangente nel punto (4; 1) alla retta di equazione* $3x-4y-8=0$ *e passante per (5; 3). Verificare che la circonferenza è tangente all'asse y nel punto (0; 3)*

Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas

Determino la retta perpendicolare alla retta $3x-4y-8=0$ e passante per il punto A (4; 1): $r: 4x+3y-19=0$.
Determino l'asse del segmento di estremi A (4; 1) e B (5; 3):
$s: y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{4}$.
Metto a sistema le due rette *r* e *s* e ottengo le coordinate del centro della circonferenza: $C\left(\frac{5}{2};3\right)$ e $r=AC=\frac{5}{2}$, perciò la circonferenza ha equazione: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}$.
Mettendo a sistema la circonferenza con l'equazione dell'asse *y* ottengo $\Delta=0$ (quindi è tangente all'asse *y*) e il punto (0; 3).