Problema 1

Un contenitore è diviso da un setto mobile in due parti (figura 1), ciascuna delle quali contiene un gas perfetto a temperatura T. Inizialmente il setto è bloccato in modo tale che le pressioni del gas siano rispettivamente

$$P_A = 8{,}5 \cdot 10^5\ Pa \qquad e \qquad P_B = 1{,}3 \cdot 10^5\ Pa$$

e i volumi siano

$$V_A = 1{,}4\ L \qquad e \qquad V_B = 4{,}8\ L$$

A. Il setto viene sbloccato e si muove con attrito trascurabile fino a fermarsi nella posizione di equilibrio, mentre la temperatura viene mantenuta costante. Scrivi la condizione per cui si realizza l'equilibrio.

B. Scrivi i numeri incogniti delle moli n_A e n_B in termini dei dati iniziali e verifica che la pressione finale sia tale che:

$$P\,(V_A + V_B) = P_A V_A + P_B V_B$$

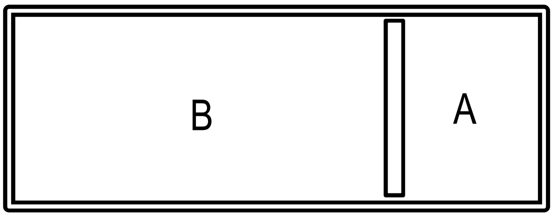
C. Calcola la pressione P e il volume delle due parti nella condizione di equilibrio.

D. Per un gas perfetto la pressione è legata alla densità di molecole N/V del gas e alla loro energia cinetica media $\overline{K}$ dalla relazione

$$P = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\,\overline{K}$$

A partire da questa proprietà, spiega perché all'equilibrio la densità del gas nei due setti è la stessa.

$$P_A = 8{,}5 \cdot 10^5\ Pa \qquad P_B = 1{,}3 \cdot 10^5\ Pa \qquad V_A = 1{,}4\ L \qquad V_B = 4{,}8\ L$$



A. Perché si realizzi l'equilibrio, la pressione in entrambi i volumi dev'essere uguale:

$$\boldsymbol{P'_A = P'_B = P}$$

B. Per l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$n_A = \frac{P_A V_A}{RT} \qquad n_B = \frac{P_B V_B}{RT}$$

Mentre, mantenendo la temperatura costante, vale la legge di Boyle e indicando con P la pressione finale e con V'_A e V'_B i volumi finali:

$$\begin{cases} P' V'_A = P_A V_A \\ P' V'_B = P_B V_B \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni, otteniamo:

$$P'(V'_A + V'_B) = P_A V_A + P_B V_B$$

C. Da quest'ultima relazione, si può determinare la pressione finale:

$$P' = \frac{P_A V_A + P_B V_B}{V'_A + V'_B} = \frac{P_A V_A + P_B V_B}{V_A + V_B} = \boldsymbol{2{,}9 \cdot 10^5\ Pa}$$

Posso determinare i volumi finali, ricorrendo alla legge di Boyle:

$$P' V'_A = P_A V_A \qquad \Rightarrow \qquad V'_A = \frac{P_A V_A}{P'} = \boldsymbol{4{,}1\ L}$$

$$V'_A = V_A + V_B - V'_B = \boldsymbol{2{,}1\ L}$$

D. All'equilibrio, la pressione dei due gas è uguale, perciò:

$$P'_A = P'_B \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\frac{N_A}{V'_A}\overline{K_A} = \frac{2}{3}\frac{N_B}{V'_B}\overline{K_B} \;\Rightarrow\; \frac{n_A N}{V'_A}\frac{3}{2}kT = \frac{n_B N}{V'_B}\frac{3}{2}kT \;\Rightarrow\; \frac{n_A}{V'_A} = \frac{n_B}{V'_B} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{m_A}{M}}{V'_A} = \frac{\frac{m_B}{M}}{V'_B} \;\Rightarrow\; \frac{m_A}{V'_A} = \frac{m_B}{V'_B} \;\Rightarrow\; \rho_A = \rho_B$$

Problema 2

Un cilindro con una parete mobile contiene 3,50 moli di gas perfetto monoatomico. Nello stato iniziale A, $V_A = 70{,}0\ L$ e $P_A = 1{,}22 \cdot 10^5\ Pa$.

A. Calcola la temperatura T_A del gas.

B. Mediante una trasformazione isobara, la temperatura viene innalzata a $T_B = 144°C$. Calcola il volume del gas nel nuovo stato B.

C. Il gas viene quindi portato nello stato C alla temperatura iniziale mediante una trasformazione isocora. Calcola la pressione del gas P_C.

Infine il gas viene riportato allo stato iniziale A mediante la trasformazione rappresentata nel diagramma PV (figura 2).

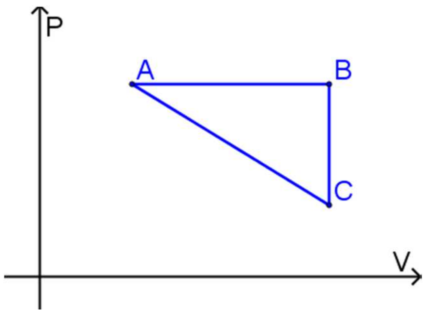
D. Inserisci nel diagramma le trasformazioni AB e BC.

E. Calcola il lavoro totale compiuto dal gas nel ciclo ABCA.

$$n = 3{,}50 \qquad V_A = 70{,}0\ L \qquad P_A = 1{,}22 \cdot 10^5\ Pa \qquad T_B = 144°C$$

A. Per determinare la temperatura del gas, a partire dalle condizioni iniziali, uso l'equazione di stato del gas perfetto:

$$P_A V_A = nRT_A \qquad \Rightarrow \qquad T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \mathbf{293\ K}$$



B. Per la prima legge di Gay-Lussac, trattandosi di una trasformazione isobara:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \qquad \Rightarrow \qquad V_B = V_A \frac{T_B}{T_A} = \mathbf{99{,}5\ L}$$

C. Per la seconda legge di Gay-Lussac, trattandosi di una trasformazione isocora:

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P_A}{T_B} = \frac{P_C}{T_A} \qquad \Rightarrow \qquad P_C = P_A \frac{T_A}{T_B} = \mathbf{8{,}57 \cdot 10^4\ Pa}$$

D. Vedi grafico

E. Per determinare il lavoro compiuto, calcolo l'area racchiusa dal triangolo:

$$L = \frac{1}{2}(P_A - P_C) \cdot (V_B - V_A) = \mathbf{535\ J}$$

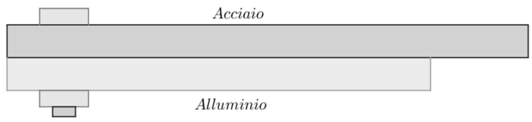
Questionario

1. Come mostra la figura 3, due strisce sottili di metallo, alla stessa temperatura, sono bloccate insieme a un estremo. Una striscia è di acciaio, mentre l'altra è di alluminio. La striscia di acciaio è più lunga di quella di alluminio dello 0,10 %. Di quanto deve aumentare la temperatura perché le due strisce abbiano la stessa lunghezza? (coefficiente di dilatazione lineare dell'alluminio $23 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$, coefficiente di dilatazione lineare dell'acciaio $12 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$)

$$L_{ac} = \frac{100{,}1}{100} L_{Al} \qquad \lambda_{Al} = 23 \cdot 10^{-6}\ K^{-1} \qquad \lambda_{ac} = 12 \cdot 10^{-6}\ K^{-1} \qquad L'_{ac} = L'_{Al} \qquad \Delta T?$$

Per la legge di dilatazione lineare:

$$L'_{ac} = L_{ac}\ (1 + \lambda_{ac}\Delta T) \qquad L'_{Al} = L_{Al}\ (1 + \lambda_{Al}\Delta T)$$



Perciò, considerando l'uguaglianza tra le due sbarre dilatate:

$$L_{ac}\ (1 + \lambda_{ac}\Delta T) = L_{Al}\ (1 + \lambda_{Al}\Delta T)$$

$$\frac{100{,}1}{100} L_{Al}\ (1 + \lambda_{ac}\Delta T) = L_{Al}\ (1 + \lambda_{Al}\Delta T) \quad \Rightarrow \quad 100{,}1 + 100{,}1\lambda_{ac}\Delta T = 100 + 100\lambda_{Al}\Delta T$$

$$0{,}1 = 100\lambda_{Al}\Delta T - 100{,}1\lambda_{ac}\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{0{,}1}{100\lambda_{Al} - 100{,}1\lambda_{ac}} = \mathbf{91°C}$$

2. Un proiettile di piombo ha un'energia cinetica uguale all'energia necessaria per fonderlo. La temperatura iniziale del proiettile è 30,0°C. Calcola la velocità del proiettile. (temperatura di fusione del piombo 328°C, calore latente di fusione del piombo $22{,}9\ kJ/K$, calore specifico del piombo $130\ J/(kg\ K)$)

$$T_o = 30{,}0°C \qquad T = 328°C \qquad L_f = 22{,}9\ kJ/K \qquad c = 130\ J/(kg\ K) \qquad v?$$

L'energia cinetica del proiettile è uguale all'energia necessaria per fonderlo, ovvero per innalzare la sua temperatura dalla temperatura iniziale a quella di fusione e poi per fonderlo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mc\ (T - T_o) + mL_f \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2c\ (T - T_o) + 2L_f \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2c\ (T - T_o) + 2L_f} = \mathbf{351\ m/s}$$

3. Si vogliono gonfiare dei palloncini usando l'elio di una bombola, che ne contiene $0{,}0031\ m^3$ alla pressione di $1{,}6 \cdot 10^7\ Pa$. Ogni palloncino contiene $0{,}034\ m^3$ di elio alla pressione di $1{,}2 \cdot 10^5\ Pa$. La temperatura dell'elio nella bombola e nei palloncini è la stessa e rimane costante. Calcola il numero massimo di palloncini che si possono gonfiare.

$$V_B = 0{,}0031\ m^3 \qquad P_B = 1{,}6 \cdot 10^7 Pa \qquad V = 0{,}034\ m^3 \qquad P = 1{,}2 \cdot 10^5 Pa \qquad T_B = T \qquad N?$$

Possiamo determinare il numero di palloncini facendo il rapporto tra il numero di moli, passando attraverso l'equazione di stato del gas perfetto:

$$P_B V_B = n_B RT \quad \Rightarrow \quad n_B = \frac{P_B V_B}{RT} \qquad e \qquad PV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{PV}{RT}$$

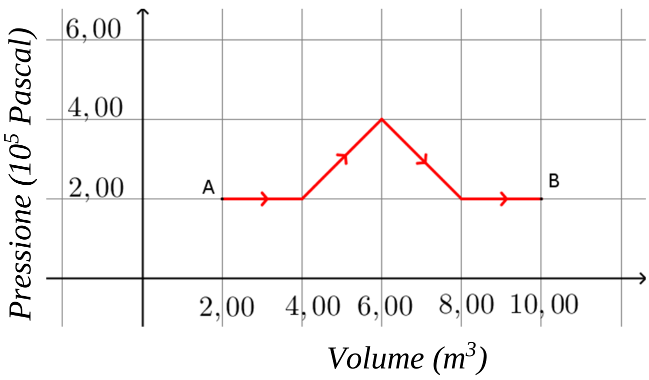
$$N = \frac{n_B}{n} = \frac{\frac{P_B V_B}{RT}}{\frac{PV}{RT}} = \frac{P_B V_B}{PV} = \mathbf{12}$$

4. Un gas perfetto monoatomico si espande passando dal punto A al punto B lungo il percorso mostrato in figura 4. Calcola il lavoro compiuto dal gas. Se la temperatura del gas nel punto A è 185 K, qual è la sua temperatura nel punto B?

$$P_A = 2{,}00 \cdot 10^5 Pa \qquad P_1 = P_A \qquad P_2 = 4{,}00 \cdot 10^5\ Pa \qquad P_3 = P_A \qquad P_B = P_A$$
$$V_A = 2{,}00\ m^3 \qquad V_1 = 4{,}00\ m^3 \qquad V_2 = 6{,}00\ m^3 \qquad V_3 = 8{,}00\ m^3 \qquad V_B = 10{,}00\ m^3$$
$$L? \qquad T_A = 185\ K \qquad T_B?$$

Il lavoro compiuto dal gas corrisponde all'area sottesa dal grafico, ovvero:

$$L = P_A(V_1 - V_A) + \frac{1}{2}(P_A + P_2)(V_2 - V_1) +$$
$$+\frac{1}{2}(P_2 + P_A)(V_3 - V_2) + P_A(V_B - V_3) = \mathbf{2{,}00 \cdot 10^6\ J}$$



Per determinare la temperatura finale, applico l'equazione di stato del gas perfetto:

$$P_A V_A = nRT_A \qquad P_B V_B = nRT_B$$
$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_B V_B}{\frac{P_A V_A}{T_A}} = T_A \frac{V_B}{V_A} = \mathbf{925\ K}$$

5. Un sistema assorbe 2360 J di calore alla pressione costante di $1{,}26 \cdot 10^5\ Pa$ e la sua energia interna aumenta di 3990 J. Di quanto cambia il volume del sistema? Aumenta o diminuisce?

$$Q = 2360\ J \qquad P = 1{,}26 \cdot 10^5\ Pa \qquad \Delta U = 3990\ J \qquad \Delta V?$$

Per il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = Q - L$$

E il lavoro della trasformazione isobara è dato da:

$$L = P\ \Delta V$$

Perciò:

$$L = Q - \Delta U \qquad \Rightarrow \qquad P\ \Delta V = Q - \Delta U$$

Siccome $Q < \Delta U$, la quantità a secondo membro è negativa, perciò il volume diminuisce:

$$\Delta V = \frac{Q - \Delta U}{P} = \mathbf{-1{,}29 \cdot 10^{-2}\ m^3}$$

6. Considera tre macchine termiche A, B e C, ciascuna delle quali riceve 1650 J di calore da un serbatoio caldo (T=550 K). Queste tre macchine termiche cedono a un serbatoio freddo (T=330 K) una certa quantità di calore: A cede 1120 J, B 990 J e C 660 J. Calcola per ogni macchina termica la variazione di entropia totale dell'universo. Determina quale macchina è reversibile, quale è irreversibile e quale non può esistere.

$$Q = 1650\ J \qquad T_c = 550\ K \qquad T_f = 330\ K \qquad Q_{fA} = 1120\ J \qquad Q_{fB} = 990\ J \qquad Q_{fC} = 660\ J$$

A. $\Delta S_A = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_{fA}}{T_f} = 0{,}4\ J/K$ Siccome la variazione di entropia è positiva, la macchina è **irreversibile**

B. $\Delta S_B = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_{fB}}{T_f} = 0\ J/K$ Siccome la variazione di entropia è nulla, la macchina è **reversibile**

C. $\Delta S_C = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_{fC}}{T_f} = -1{,}0\ J/K$ Siccome la variazione di entropia è negativa, la macchina **non può esistere**