1. Un'automobilista attraversa un tratto dell'autostrada Milano-Brescia sorvegliato dal sistema Tutor. A metà del tratto, l'autista si accorge di aver tenuto una velocità costante superiore del 10% alla velocità limite e capisce di rischiare una contravvenzione. Se nella seconda parte del percorso la sua velocità media è inferiore del 10% alla velocità limite, quale risulterà essere la velocità media sull'intero tratto, espressa come percentuale della velocità limite? Incorrerà in una sanzione?

$$v_1 = \frac{110}{100} v_L \qquad v_2 = \frac{90}{100} v_L \qquad v_m \;{}^{<}\!/\!_{>}\; v_L?$$

La velocità è data, per definizione, da: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Per non incorrere in una contravvenzione, l'automobilista dovrà mantenere una velocità media inferiore o uguale alla velocità limite, perciò il rapporto tra l'intero tratto di autostrada e il tempo impiegato a percorrerlo dovrà dare come risultato la velocità limite.

Il tempo totale per percorre tale tratto sarà dato da: $\Delta t_L = \frac{s}{v_L}$, nel momento in cui si rispetta la velocità limite. Calcolo il tempo totale, dato da: $\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2$, dove il primo intervallo di tempo Δt_1 è il tempo necessario per percorrere la prima metà del tratto $s/2$ con una velocità v_1, mentre il secondo, Δt_2, è il tempo per percorrere la seconda metà del tratto di strada $s/2$, ovvero:

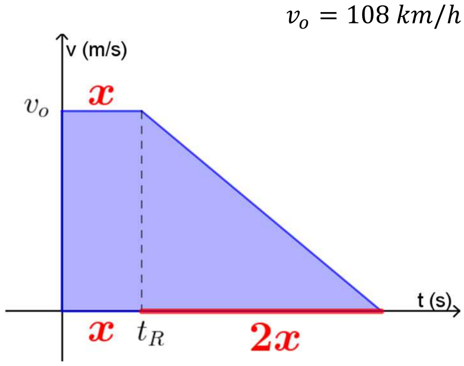
$$\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{s/2}{v_1} + \frac{s/2}{v_2} = \frac{s}{2}\left(\frac{100}{110\, v_L} + \frac{100}{90\, v_L}\right) = \frac{s}{2} \cdot \frac{10}{v_L} \cdot \frac{20}{99} = \frac{s}{v_L}\frac{100}{99} = \frac{100}{99}\Delta t_L$$

Notando che il tempo totale è superiore al tempo impiegato a percorrere la strada ad una velocità pari a quella limite, posso già riconoscere che l'autista **non incorrerà in una sanzione**, visto che il suo tempo è maggiore di quello limite. Posso determinare la velocità media sull'intero tratto:

$$v_m = \frac{s}{\Delta t_{tot}} = \frac{s}{\frac{s}{v_L}\frac{100}{99}} = s \cdot \frac{v_L}{s} \cdot \frac{99}{100} = \frac{99}{100} v_L = \mathbf{99\%\, v_L}$$

2. Un automobilista sta viaggiando alla velocità di 108 km/h, quando nota un ostacolo a 75 m di distanza. Supponendo che l'autista riesca a evitare l'ostacolo per un soffio e che la frenata duri il doppio della reazione, qual è il suo tempo di reazione?

$$v_o = 108\, km/h = 30\, m/s \qquad d = 75\, m \qquad t_F = 2\, t_R \qquad t_R?$$



Indico con x il tempo di reazione e con $2x$ il tempo della frenata, come indicato nel grafico velocità-tempo della situazione descritta, rappresentato a lato. L'area colorata, quella sottesa dal grafico, rappresenta lo spazio percorso. Usando l'area del trapezio è possibile determinare, velocemente, il tempo di reazione x:

$$d = \frac{v_o}{2} \cdot (x + x + 2x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2d}{4\, v_o} = \frac{d}{2v_o} = \mathbf{1,25\; s}$$

3. Due auto dello stesso modello si trovano a percorrere un tratto di strada in due momenti diversi e con due velocità diverse. Entrambi gli autisti si trovano, ad un certo punto, nelle condizioni di dover arrestare l'auto e, esercitando la stessa pressione sul freno (cioè mantenendo la stessa decelerazione), la prima si arresta in uno spazio che è doppio di quello percorso dalla seconda. Qual è il rapporto tra le due velocità?

$$a_1 = a_2 \qquad s_1 = 2s_2 \qquad v_1/v_2?$$

Trattandosi di una frenata che riduce a zero la velocità, lo spazio di frenata può essere espresso in funzione della velocità iniziale e dell'accelerazione: $s = \frac{v_F^2 - v_O^2}{2a}$, dove v_F è la velocità finale (e in questo caso è nulla), mentre v_o è, rispettivamente, v_1 per la prima auto e v_2 per la seconda:

$$s_1 = -\frac{v_1^2}{2a_1} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{-2a_1 s_1} \qquad\qquad s_2 = -\frac{v_2^2}{2a_2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{-2a_2 s_2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{-2a_1 s_1}{-2a_2 s_2}} = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} = \sqrt{\frac{2s_2}{s_2}} = \mathbf{\sqrt{2}}$$

4. Un'automobile viaggia su un'autostrada a 33 m/s. Nell'istante in cui passa davanti a una rampa d'accesso un'altra automobile si immette sull'autostrada. La seconda automobile parte da ferma. Quale accelerazione costante deve mantenere per raggiungere la prima automobile dopo 2,5 km?

$$v_1 = 33\, m/s \qquad v_{o_2} = 0\, m/s \qquad s = 2500\, m \qquad a?$$

La prima automobile si muove a velocità costante, $v_1 = \frac{s}{\Delta t}$, percorrendo 2500 m, in un tempo $\Delta t = \frac{s}{v_1}$. La seconda automobile parte da ferma e percorre 2500 m in un tempo Δt. Posso determinare l'accelerazione usando la legge oraria:

$$s = v_o \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s}{(\Delta t)^2} = \frac{2s}{\left(\frac{s}{v_1}\right)^2} = 2s \cdot \frac{v_1^2}{s^2} = \frac{2v_1^2}{s} = \mathbf{0,87\, m/s^2}$$

5. Un'auto parte da Verona alle ore 12 diretta verso Torino, distante 300 km, viaggiando a una velocità media costante di 100 km/h. Una seconda auto parte da Torino diretta verso Verona alle ore 14 e viaggia con una velocità media costante di 70 km/h. A che ora e a quale distanza da Verona si incontrano le due auto?

Auto A: Verona-Torino: $v_A = -100\, km/h \qquad t_{o_A} = 0\, s \qquad s_{o_A} = 300\, km$
Auto B: Torino-Verona: $v_B = 70\, km/h \qquad t_{o_B} = 7200\, s \qquad s_{o_B} = 0\, km$

Scrivo la legge oraria delle due auto, ma prima faccio in modo che il tempo iniziale coincida, determinando la distanza percorsa dall'auto A dopo 2 ore, ovvero 200 km, perciò posso cambiare i dati e determinare le leggi orarie:

Auto A: Verona-Torino: $v_A = -100\, km/h \qquad t_{o_A} = 0\, s \qquad s_{o_A} = 100\, km$
Auto B: Torino-Verona: $v_B = 70\, km/h \qquad t_{o_B} = 0\, s \qquad s_{o_B} = 0\, km$

$$A: s = s_{o_A} + v_A t \qquad\qquad B: s = s_{o_B} + v_B t$$

Mettendo a sistema le due equazioni, posso determinare dove e quando si incontrano le due auto:

$$\begin{cases} s = s_{o_A} + v_A t \\ s = v_B t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_B t = s_{o_A} + v_A t \\ s = v_B t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{s_{o_A}}{v_B - v_A} = 35\, min \\ s = \dfrac{s_{o_A} v_B}{v_B - v_A} = 41\, km \end{cases}$$

Le due auto si incontrano alle **14:35** a 41 km da Torino, cioè a **259 km** da Verona.