1. Determina l'insieme dei punti in cui la funzione $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & se\ x \leq 0 \\ \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 & se\ x > 0 \end{cases}$ è derivabile.

La funzione è costituita da due parabole, quindi continue e derivabili ovunque. Dobbiamo determinare il comportamento della funzione in $x = 0$

Stabiliamo se la funzione è continua per $x = 0$, verificando che limite destro e limite sinistro della funzione coincidono tra loro e con il valore della funzione calcolato in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + 2) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) = f(0) = 2$$

Verificato che la funzione è **continua** per qualsiasi valore di x, possiamo calcolare la derivata della funzione e i limiti destri e sinistri della funzione derivata:

$$y' = \begin{cases} 2x + 2 & se\ x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} & se\ x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} (2x + 2) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dato che i due limiti sono diversi, **la funzione non è derivabile per $x = 0$**.

2. Data la funzione $y = \frac{x^3}{3} + x \ln x$, trova per quale valore di x si ha: $y'''(x) = -2$.

Calcolo le derivate successive della funzione per ottenerne la derivata terza:

$$y' = x^2 + \ln x + 1 \qquad y'' = 2x + \frac{1}{x} \qquad y''' = 2 - \frac{1}{x^2}$$

Poniamo la derivata terza uguale a -2 e risolviamo l'equazione:

$$2 - \frac{1}{x^2} = -2 \qquad \frac{1}{x^2} = 4 \qquad x^2 = \frac{1}{4} \qquad x = \pm\frac{1}{2}$$

Possiamo accettare una sola delle due soluzioni, ovvero $x = \frac{1}{2}$, dato che il dominio della funzione è $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.

3. Spiega perché è certo che tutte le rette tangenti alla curva di equazione $y = \frac{5+2x}{x}$ formino con l'asse x un angolo ottuso.

Calcolo la derivata della funzione: $y = \frac{5}{x} + 2 \qquad y' = -\frac{5}{x^2}$.

La derivata prima della funzione è tale per cui, qualsiasi sia l'ascissa che sostituiremo (purché non nulla, per il dominio della funzione), otterremo un valore negativo. La derivata della funzione in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione e coincide, quindi, con la tangente dell'angolo formato dalla retta con la direzione positiva dell'asse x. Siccome tale tangente è sempre negativa, ne possiamo dedurre che l'angolo formato dalla retta tangente con la direzione positiva dell'asse x è maggiore di 90° e minore di 180°, ovvero è un angolo ottuso.

4. Data la funzione $y = ax^4 + bx^3 + cx + d$, determina i valori dei parametri a, b, c e d, sapendo che la funzione ha un punto stazionario nell'origine e ha tangente $2x - 4y - 1 = 0$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$. Determina, inoltre, l'ascissa del suo ulteriore punto stazionario.

Se la funzione ha un punto stazionario nell'origine, allora passa per l'origine per cominciare, perciò: $y(0) = 0$.
Siccome tale punto è stazionario, la derivata prima della funzione calcolata in $x = 0$ è nulla: $y'(0) = 0$.
Il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ appartiene alla retta tangente, perciò ha coordinate: $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
Sapendo che nel punto dato, la tangente ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$, la derivata prima della funzione calcolata in $x = \frac{1}{2}$ è: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
Calcoliamo, quindi, la derivata prima della funzione: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + c$. Procediamo con la costruzione del sistema:

$$\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y\left(\frac{1}{2}\right)=0 \\ y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ \frac{1}{16}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{2}c+d=0 \\ \frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b+c=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} d=c=0 \\ a+2b=0 \\ 2a+3b=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=c=0 \\ a=-2b \\ -4b+3b=2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{a=4; b=-2; d=c=0}$$

La funzione è: $y=4x^4-2x^3$ e la sua derivata è: $y'=16x^3-6x^2$. Per determinare l'ulteriore punto stazionario, poniamo la derivata prima uguale a zero e risolviamo l'equazione:

$$16\,x^3-6x^2=0 \qquad 2x^2\,(8x-3)=0$$

Una soluzione (doppia) dell'equazione è $x=0$, già indicata nel testo. L'altra è $\boldsymbol{x=\frac{3}{8}}$.

5. Data la funzione $y=\frac{ax^2+bx+6}{x-c}$, trova a, b e c, sapendo che, nel punto $(0;\ -2)$, il grafico ha per tangente una retta parallela alla retta $4x+3y-5=0$ e che ha per asintoto obliquo una retta parallela alla retta $3x-y=0$.

Se la funzione ha un punto stazionario in $(0;\ -2)$, allora passa per tale punto, perciò: $y(0)=-2$.

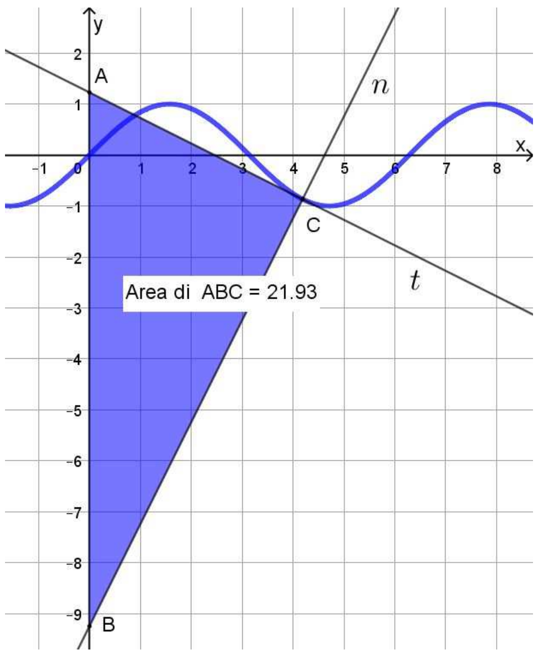
Sapendo che nel punto dato, la tangente ha coefficiente angolare $-\frac{4}{3}$, la derivata prima della funzione calcolata in $x=0$ è: $y'(0)=-\frac{4}{3}$.

Dato che il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo è 3, abbiamo: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$.

Calcoliamo, quindi, la derivata prima della funzione: $y'=\frac{(2ax+b)(x-c)-(ax^2+bx+6)}{(x-c)^2}$. Procediamo con la costruzione del sistema:

$$\begin{array}{l} y(0)=-2 \\ y'(0)=-\frac{4}{3} \\ \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-cx}=3 \end{array} \qquad \begin{cases} \frac{6}{-c}=-2 \\ \frac{-bc-6}{c^2}=-\frac{4}{3} \\ \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=3 \\ \frac{3b+6}{9}=\frac{4}{3} \\ a=3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{a=3; b=2; c=3}$$

6. Sia data la funzione $y=\sin x$. Indicate con A e B le intersezioni con l'asse y della tangente e della normale alla curva nel punto C di ascissa $\frac{4}{3}\pi$, determina l'area del triangolo ABC.



Determino le coordinate di C, sostituendo l'ascissa data nell'espressione della funzione: $C\left(\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Determino la derivata della funzione: $y'=\cos x$. Procedo determinando l'equazione della retta tangente alla funzione in $x=\frac{4}{3}\pi$:

$$y-y_C=f'(x_C)(x-x_C)$$

Della tangente, mi interessano le coordinate del punto A, ottenute sostituendo l'ascissa $x=0$, visto che A è il punto di intersezione della tangente con l'asse y:

$$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{4}{3}\pi\right) \qquad y_A=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad A\left(0;\ \frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Procedo determinando l'equazione della retta normale alla funzione in $x=\frac{4}{3}\pi$:

$$y-y_C=-\frac{1}{f'(x_C)}(x-x_C)$$

Della normale, mi interessano le coordinate del punto B, ottenute sostituendo l'ascissa $x=0$, visto che B è il punto di intersezione della normale con l'asse y:

$$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(0-\frac{4}{3}\pi\right) \qquad y_B=-\frac{8}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B\left(0;\ -\frac{8}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Calcolo l'area del triangolo ABC:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot d(C;asse\ y)=\frac{1}{2}\,(y_A-y_B)\cdot x_C=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{20}{9}\pi^2}$$