1. Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\,lnx$ e $g(x) = \ln\ (2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria, 2004, Quesito 6

$$f'(x) = \frac{3}{x} \qquad\qquad g'(x) = \frac{1}{(2x)^3} \cdot 3\ (2x)^2 \cdot 2 = \frac{3}{x}$$

Le due funzioni hanno la stessa derivata, perché differiscono per una costante, infatti:

$$g(x) = \ln\ (2x)^3 = 3\ln\ (2x) = 3\ (\ln 2 + \ln x) = 3\ln x + 3\ln 2 = f(x) + 3\ln 2$$

2. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione

$$f(x) = arc\ tg\ x - arc\ tg\ \frac{x-1}{x+1}$$

è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria, 2005, Quesito 10

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2\ (1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Avendo derivata nulla, la funzione è una costante, come evidenziato dal grafico:

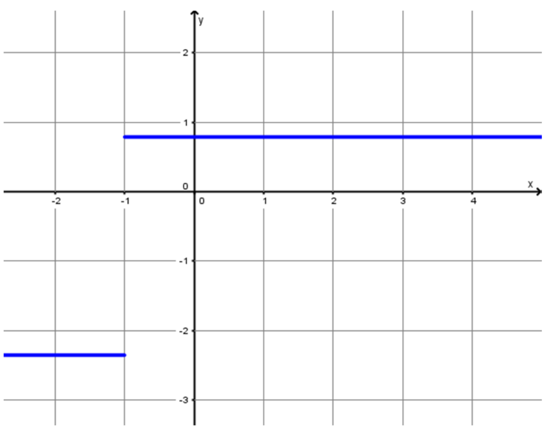
Il dominio della funzione è:

$$D =]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]-1;\ +\infty[$$

Considero un valore nel primo intervallo e uno nel secondo:

$$f(1) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

$$f(-2) = arc\ tg\ (-2) - arc\ tg\ (3) = \boldsymbol{-\frac{3}{4}\pi}$$



3. Mostrare che le tangenti alla curva $y = \frac{\pi \, sen \, x}{x}$ in $x = \pi$ e $x = -\pi$ si intersecano ad angolo retto.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria, 2004, Quesito 3

Determino i coefficienti angolari delle tangenti alla curva nei punti di ascissa π e $-\pi$, sapendo che: $m = f'(x_o)$
Calcolo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \pi \frac{x \cos x - sen \, x}{x^2}$$

Calcolo i due coefficienti angolari:

$$m_1 = f'(\pi) = -1 \qquad\qquad m_2 = f'(-\pi) = 1$$

Dato che:

$$m_1 m_2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 \perp t_2$$

4. A. Calcola la derivata di $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ mediante la definizione e conferma il risultato con le regole di derivazione.
B. Individua i punti in cui il grafico della funzione ha tangente parallela alla bisettrice del I quadrante.
C. Nei punti $x = \pm 1$ la funzione è derivabile? Esiste la tangente in tali punti?

A. La derivata è il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - \sqrt{1-(x+h)^2} - 2 + \sqrt{1-x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+h)^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+h)^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+h)^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - x^2 - 1 + x^2 + 2xh + h^2}{h\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+h)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\,(2x+h)}{h\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+h)^2}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+h)^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Con le regole di derivazione:

$$D\left(2 - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = D(2) - D\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = 0 - \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x) = \boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

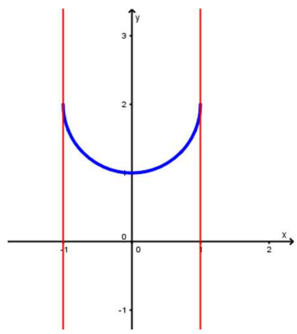
B. Perché la tangente al grafico sia parallela alla bisettrice del primo quadrante, deve avere coefficiente angolare 1, ovvero:

$$f'(x_o) = 1 \qquad \frac{x_o}{\sqrt{1-x_o^2}} = 1 \qquad x_o = \sqrt{1-x_o^2} \qquad \begin{cases} x_o^2 = 1 - x_o^2 \\ x_o > 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x_o = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

C. Nei punti di ascissa $x = \pm 1$, la funzione **non è derivabile**, ma **la tangente esiste** ed è parallela all'asse y. La funzione è infatti una semicirconferenza di centro $C\ (0; 2)$ e raggio $r = 1$:

$$y = 2 - \sqrt{1-x^2} \qquad \begin{cases} y \leq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ y^2 - 4y + 4 = 1 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$



5. Data la funzione $y = kx^2 - (k-1)\,x - k + 3$, scrivi l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x = 3$ e determina k in modo che la retta tangente passi per il punto $P(1;2)$.

Il punto di ascissa 3 ha coordinate: $(3; 9k - 3k + 3 - k + 3) = (3; 5k + 6)$.

Calcolo la derivata della funzione: $f'(x) = 2kx - k + 1$ perciò: $f'(x_o) = f'(3) = 5k + 1$

Ora posso determinare l'equazione della retta tangente con la formula: $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

$$y - 5k - 6 = (5k+1)(x-3)$$

Impongo il passaggio della tangente per il punto P, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della retta:

$$2 - 5k - 6 = (5k+1)(1-3) \qquad 2 - 5k - 6 = -10k - 2 \qquad 5k = 2 \qquad \boldsymbol{k = \frac{2}{5}}$$

6. Calcola le derivate delle seguenti funzioni:

A. $y = \ln\frac{x+1}{x^2-3}$

$$y' = \frac{x^2-3}{x+1}\cdot\frac{x^2-3-2x\,(x+1)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2-3-2x^2-2x}{(x+1)(x^2-3)} = -\boldsymbol{\frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2-3)}}$$

B. $y = \frac{x\ln x}{\sqrt{x}}$

$$D\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{x}}\right) = D\left(\sqrt{x}\,lnx\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \boldsymbol{\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}}$$

C. $y = \left(sen\,\sqrt{x} + 2\right)^2$

$$y' = 2\left(sen\,\sqrt{x} + 2\right)\cos\,\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{\left(sen\,\sqrt{x}+2\right)\cos\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

D. $y = \ln\left(\cos\,\sqrt{x^2+1}\right)$

$$y' = \frac{1}{\cos\,\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(-sen\,\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = -\boldsymbol{\frac{x\,tg\,\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}$$

E. $y = \left(\ln\,tg\frac{x}{2} - \frac{1}{sen\,x}\right)$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{sen^2x}\cdot\cos x = \frac{1}{2\,\dfrac{sen\,\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\cos x}{sen^2\,x} = \frac{1}{sen\,x} + \frac{\cos x}{sen^2\,x} = \boldsymbol{\frac{sen\,x + \cos\,x}{sen^2x}}$$