1. Calcola la derivata di $y = \ln x$ usando la definizione di derivata.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

sostituendo: $\frac{1}{t} = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow$

$$= \lim_{t\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{t\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \frac{1}{x}$$

2. Disegna il grafico delle seguenti funzioni e per ciascuna indica i punti del dominio nei quali esse non sono derivabili, specificando di che tipo di punto si tratta:

$$y = \left|\frac{x+1}{x-3}\right| \qquad\qquad y = \begin{cases}\sqrt{4-x^2} & -2 < x \le 2\\ \sqrt{x-2} & x > 2\end{cases}$$

Si tratta di una iperbole omografica, presa in modo che i suoi punti abbiano ordinata positiva (perciò dove hanno ordinata negativa la funzione subisce una riflessione rispetto all'asse x). Pare che nel punto di ascissa $-1$ ci sia un punto angoloso, verifichiamolo calcolando le due derivate nel punto $-1$:

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{x+1}{x-3} & se\ x < -1 \lor x > 3\\[2mm] \dfrac{x+1}{3-x} & se\ -1 \le x < 3\end{cases}$$

$$f'_{-}(-1) = \frac{-1-3+1-1}{(-1-3)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$f'_{+}(-1) = \frac{3+1-1+1}{(3+1)^2} = \frac{1}{4}$$

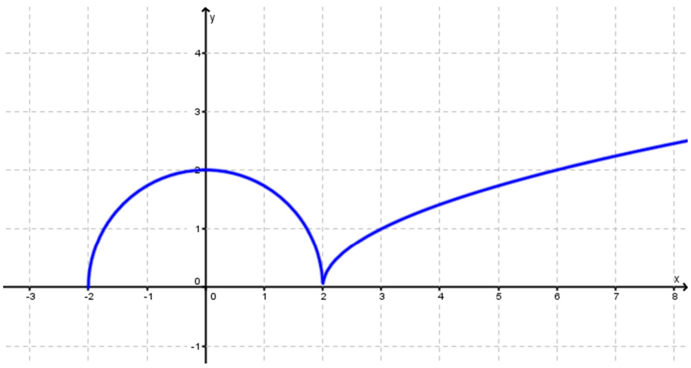

$\boldsymbol{P(-1;0)}$ è ***un punto angoloso***

Si tratta di una semicirconferenza e di una parabola di asse coincidente con l'asse x, di cui si prende solo la parte superiore. Pare che nel punto di ascissa 2 ci sia una cuspide, verifichiamolo calcolando le due derivate nel punto 2:

$$f'(x) = \begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} & -2 < x < 2\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & x > 2\end{cases}$$

Calcolando il limite, otteniamo:

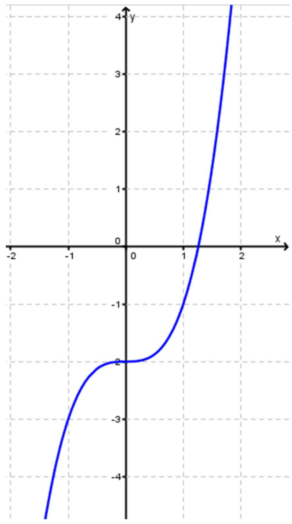
$$f'_{-}(2) = -\infty \qquad f'_{+}(2) = +\infty$$




$\boldsymbol{P(2;0)}$ è ***una cuspide***

3. Traccia il grafico delle seguenti funzioni, verificando che sono invertibili nel loro dominio e calcola $Df^{-1}(y_o)$ nei punti indicati:

$$f(x) = x^3 - 2 \qquad y_o = 6; \qquad\qquad f(x) = \frac{3x}{x-1} \qquad y_o = 6$$



La funzione è invertibile, perché suriettiva e monotona crescente in tutto il dominio

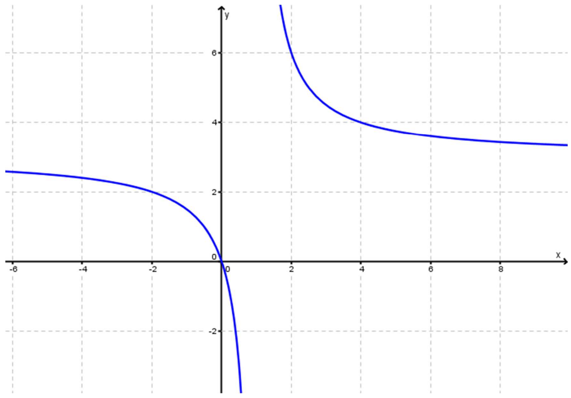
Ricaviamo la formula della funzione inversa:

$$y = x^3 - 2 \qquad x^3 = y + 2$$

L'espressione della funzione inversa è:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+2}$$

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y+2)^2}} \quad \Rightarrow \quad Df^{-1}(6) = \mathbf{\frac{1}{12}}$$



La funzione è invertibile, perché suriettiva e monotona decrescente in tutto il dominio.

Ricaviamo la formula della funzione inversa:

$$y = \frac{3x}{x-1} \qquad xy - y = 3x \qquad x(y-3) = y$$

L'espressione della funzione inversa è:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{y-3}$$

$$Df^{-1}(y) = \frac{y - 3 - y}{(y-3)^2} \quad \Rightarrow \quad Df^{-1}(6) = -\mathbf{\frac{1}{3}}$$

4. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{x^3-3x^2}{x+4}$ nel suo punto di ascissa 2.

Calcolo innanzi tutto la derivata:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x)(x+4) - (x^3-3x^2)}{(x+4)^2}$$

Il punto di intersezione con l'asse y ha ascissa nulla, perciò:

$$f'(2) = \frac{0+4}{6^2} = \frac{1}{9}$$

Determiniamo quindi la retta tangente:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \qquad y + \frac{2}{3} = \frac{1}{9}(x-2) \qquad \mathbf{y = \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}}$$

5. Determina l'ascissa del punto nel quale la retta tangente al grafico della funzione $y = e^{2x-1} - 4x$ ha coefficiente angolare $-2$.

Faccio la derivata della funzione e la pongo uguale al coefficiente angolare, in questo modo determinerò l'ascissa del punto risolvendo l'equazione ottenuta:

$$y' = 2e^{2x-1} - 4 = -2$$

$$2e^{2x-1} = 2 \qquad e^{2x-1} = 1 \qquad 2x - 1 = 0 \qquad \boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

6. Trova l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = \frac{6-x}{x-2}$ e $y = -x^2 + 6x - 10$.

Determino innanzi tutto l'ascissa del punto di intersezione delle due curve, ponendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6-x}{x-2} \\ y = -x^2 + 6x - 10 \end{cases} \qquad \frac{6-x}{x-2} = -x^2 + 6x - 10$$

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 2x^2 + 12x - 20 + 6 - x = 0 \qquad x^3 - 8x^2 + 21x - 14 = 0$$

Applicando l'algoritmo della divisione di Ruffini, con $x = 1$:

$$(x-1)(x^2 - 7x + 14) = 0$$

L'unica soluzione dell'equazione è $x = 1$.

Perciò calcolo il coefficiente angolare delle tangenti alle funzioni nel punto di ascissa 1:

$$tg\alpha = f'(x) = \frac{-1(1-2) - 1(6-1)}{(1-2)^2} = -4 \qquad tg\beta = g'(x) = -2(1) + 6 = 4$$

L'angolo formato dalle due curve:

$$\gamma = \alpha - \beta \quad \Rightarrow \quad tg\gamma = tg(\alpha - \beta) \quad \Rightarrow \quad \gamma = arctg\left|\frac{4+4}{1-16}\right| = \boldsymbol{arc\,tg\,\frac{8}{15}}$$

7. È data la curva di equazione $y = \frac{k+2x}{3x^2}$. Calcola il valore del parametro in modo che la tangente al suo grafico nel punto di ascissa 1 sia perpendicolare alla retta passante per i punti $A\ (5; 2)$ e $B\ (1; 1)$.

Determino il coefficiente angolare della retta passante per A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{1-5} = \frac{1}{4}$$

Perciò il coefficiente angolare della perpendicolare sarà $-4$.

Faccio la derivata della funzione e la calcolo nel punto di ascissa 1, dopodiché la poniamo uguale al coefficiente angolare, in questo modo determineremo il parametro risolvendo l'equazione ottenuta:

$$y' = \frac{6x^2 - 6x\,(k + 2x)}{9x^4}$$

$$\frac{6 - 6k - 12}{9} = -4 \qquad 2 + 2k = 12 \qquad 2k = 10 \qquad \boldsymbol{k = 5}$$

8. Due corpi si muovono seguendo le leggi orarie $s_1 = t^2 - 3t + 2$ e $s_2 = \frac{1}{2}t^2 + 9t - 1$. Calcola in quale istante il secondo ha velocità doppia rispetto al primo.

Determiniamo le due velocità in funzione del tempo, calcolando la derivata prima della legge oraria rispetto al tempo:

$$v_1 = 2t - 3 \qquad\qquad v_2 = t + 9$$

Poniamo la seconda velocità uguale al doppio della prima, per ricavare l'istante di tempo:

$$t + 9 = 2\,(2t - 3) \qquad\qquad 3t = 15 \qquad\qquad t = \boldsymbol{5s}$$

9. Calcola le seguenti derivate:

$$D\left(4x\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^5}\right) = D\left(4\,x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{6}}\right) = 6x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} = \boldsymbol{6\sqrt{x} + \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}}$$

$$D\left((x + 5\,lnx)\,senx\right) = \boldsymbol{\left(1 + \frac{5}{x}\right) sen\,x + (x + 5\,lnx)\cos x}$$

$$D\left(x^3(x-4)(x^3+1)\right) = 3x^2(x-4)(x^3+1) + x^3(x^3+1) + x^3(x-4)(3x^2) =$$

$$= x^2(3x^4 + 3x - 12x^3 - 12 + x^4 + x + 3x^4 - 12\,x^3) = \boldsymbol{x^2(7x^4 - 24\,x^3 + 4x - 12)}$$

$$D\left(\frac{3x}{2x^3 - x^2 - 1}\right) = \frac{3(2x^3 - x^2 - 1) - 3x(6x^2 - 2x)}{(2x^3 - x^2 - 1)^2} = \boldsymbol{3\,\frac{-4x^3 + x^2 - 1}{(2x^3 - x^2 - 1)^2}}$$

$$D\left(\frac{senx + \cos x}{sen\,x - \cos x}\right) = \frac{(\cos x - sen\,x)(senx - \cos x) - (sen\,x + \cos x)(\cos x + senx)}{(sen\,x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos^2 x - sen^2x + 2senx\cos x - sen^2x - \cos^2 x - 2\,senx\cos x}{1 - 2\,sen\,x\cos x} = \boldsymbol{\frac{-2}{1 - sen\,2x}}$$

$$D\,(tg\,3x) = \boldsymbol{\frac{3}{cos^2 3x}}$$

$$D\,(\ln\cos^2 x) = D\,(2\ln\cos x) = \frac{2}{\cos x}(-sen\,x) = \boldsymbol{-2\,tg\,x}$$

$$D\left(\frac{6}{(3x-1)^2}\right) = 6\,D\,((3x-1)^{-2}) = -12\,(3x-1)^{-3}\,3 = \boldsymbol{-\frac{36}{(3x-1)^3}}$$

$$D\left(\ln\frac{2-x}{2+x}\right) = \frac{2+x}{2-x}\cdot\frac{-1(2+x) - (2-x)}{(2+x)^2} = \frac{-4}{4-x^2} = \boldsymbol{\frac{4}{x^2-4}}$$

$$D\left(e^{\sqrt{x}} + \ln\sqrt[3]{x^2}\right) = D\left(e^{\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\ln x\right) = \boldsymbol{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3x}}$$

$$D\left(\frac{1 + tg^2x}{1 - tg^2x}\right) = D\left(\frac{1}{\cos^2 x - sen^2x}\right) = D(\cos^{-1}2x) = -\cos^{-2}2x\cdot(-sen\,2x)\cdot 2 = \boldsymbol{\frac{2\,tg\,2x}{cos\,2x}}$$

$$D\left(\ln\sqrt{\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}}\right) = \frac{1}{2}D\left(\ln\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\cdot\frac{-2\cos x\,sen\,x\,(1-\cos^2 x) - 2\cos x\,sen\,x\,(1+\cos^2 x)}{(1-\cos^2 x)^2} = \boldsymbol{-\frac{2ctg\,x}{1+\cos^2 x}}$$

$$D\left(3\,arc\,tg\,\sqrt{x}\right) = \frac{3}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{3}{2\sqrt{x}\,(1+x)}}$$

$$D\,(arc\cos\,(\cos 3x)) = D\,(3x) = \boldsymbol{3}$$