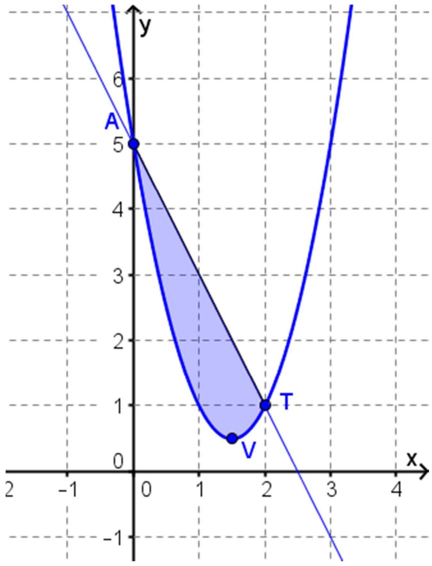
1. Dopo aver determinato l'equazione della parabola tangente alla retta $y = 2x - 3$ nel suo punto di ascissa 2 e passante per il punto di ordinata 5 dell'asse y, verifica che il suo vertice appartiene alla retta $y = 3x - 4$. Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dal punto di tangenza e dall'intersezione della parabola con l'asse y.



Per determinare l'equazione della parabola tangente alla retta nel punto $T\ (2,1)$, considero innanzi tutto il fascio di parabole tangenti a una retta nota in un punto dato:

$$y = 2x - 3 + k\,(x-2)^2$$

Determino la parabola richiesta, sostituendo nell'equazione del fascio il punto dell'asse y di ordinata 5:

$$5 = -3 + 4k \qquad \Rightarrow \qquad k = 2$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 6x + 5}$$

Determino il vertice della parabola:

$$V\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Per verificare l'appartenenza del vertice alla retta $y = 3x - 4$, sostituisco le coordinate del vertice nell'equazione della retta, ottenendone un'identità:

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 4 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad c.v.d.$$

Per determinare l'area del segmento parabolico, calcolo innanzi tutto il coefficiente angolare della retta AT, avendo indicato con A il punto di intersezione della parabola con l'asse y:

$$m = \frac{1-5}{2-0} = -2$$

Determino ora la parallela al segmento AT tangente alla parabola, usando il fascio di rette parallele, mettendolo a sistema con la parabola e ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 6x + 5 \\ y = -2x + q \end{cases} \qquad 2x^2 - 4x + 5 - q = 0$$

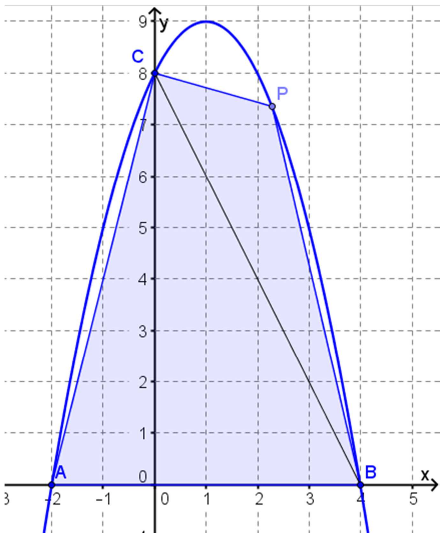
$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 2\,(5-q) = 0 \qquad q = 3 \qquad t: y = -2x + 3$$

Per calcolare l'area del segmento parabolico, devo calcolare l'area del rettangolo nel quale è inscritto e di cui il segmento è i 2/3. Calcolo quindi la distanza di A dalla retta tangente t (altezza del rettangolo), la distanza AT (base del rettangolo) e dal loro prodotto ottengo l'area:

$$h = d\,(A;t) = \frac{|5-3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \overline{AT} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

2. Sia data la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 8$. Indicati con A e B i punti di intersezione della parabola con l'asse x e con C l'intersezione con l'asse y, determina sull'arco BC di parabola un punto P tale che l'area del quadrilatero ABPC sia 32.



Determino innanzi tutto i punti richiesti:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right. \qquad A\,(-2;0) \qquad B\,(4;0)$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 8 \\ x = 0 \end{cases} \qquad C\,(0;8)$$

Posso calcolare l'area del triangolo ABC e sottrarla poi da quella del quadrilatero:

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$A_{BPC} = A_{ABPC} - A_{ABC} = 32 - 24 = 8$$

Determino la lunghezza del segmento BC e, usando la formula inversa dell'area del triangolo BPC, posso determinare la distanza di P da BC:

$$y = \frac{8-0}{0-4}\,x + 8 \qquad y = -2x + 8$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$A_{BPC} = \frac{d\,(P;BC) \cdot \overline{BC}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad d\,(P;BC) = 2\frac{A_{BPC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Calcolo la distanza di P dalla retta BC e la pongo uguale al valore appena determinato:

$$d\,(P;BC) = \frac{|y + 2x - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Considerato che il punto P si trova nel semipiano positivo determinato dalla retta BC, la condizione diventa:

$$y + 2x - 8 = 4 \qquad y + 2x - 12 = 0$$

Metto a sistema la condizione appena trovata con l'equazione della parabola, per determinare le coordinate di P:

$$\begin{cases} y = -2x + 12 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases} \qquad x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad (x-2)^2 = 0 \qquad x = 2$$

$$\boldsymbol{P\,(2;8)}$$

3. Dopo aver studiato il fascio di equazione: $(k+1)y - 2\,(k-1)x^2 + 3kx - 2 - k = 0$, determina il valore del parametro per il quale la parabola:
   A. passa per il punto $P\,(0;2)$;
   B. ha asse di simmetria $x = -3$;
   C. è tangente alla retta $2x + 3y - 2 = 0$.

Determino innanzi tutto le due generatrici:

$$ky + y - 2\,kx^2 + 2x^2 + 3kx - 2 - k = 0$$

$$y + 2x^2 - 2 + k\,(y - 2x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\boldsymbol{y = -2x^2 + 2} \qquad \boldsymbol{y = 2x^2 - 3x + 1}$$

Determino le due parabole degeneri:

$$k = -1: \quad 4x^2 - 3x - 1 = 0 \qquad \boldsymbol{(x-1)(4x+1) = 0}$$

$$k = 1: \quad \boldsymbol{2y + 3x - 3 = 0}$$

La prima parabola degenere ci dice che si tratta di un fascio di parabole secanti, con punti base di ascissa, rispettivamente:

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -\frac{1}{4}$$

Per determinare le coordinate dei punti, sostituisco le ascisse nella seconda parabola degenere:

$$\boldsymbol{A\,(1;0)} \qquad \boldsymbol{B\left(-\frac{1}{4};\frac{15}{8}\right)}$$

A. Per determinare l'equazione della parabola passante per il punto $P\,(0;2)$, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$2k + 2 - 2 - k = 0 \qquad \boldsymbol{k = 0}$$

B. Per determinare la parabola che ha asse di simmetria $x = -3$, bisogna determinare: $-\frac{b}{2a} = -3 \quad \Rightarrow \quad b = 6a$

$$3k = -12\,(k-1) \quad \Rightarrow \quad 15\,k = 12 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = \frac{4}{5}}$$

C. Metto a sistema l'equazione del fascio con quella del fascio di parabole e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} (k+1)y - 2\,(k-1)x^2 + 3kx - 2 - k = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \qquad (k+1)\left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) - 2\,(k-1)x^2 + 3kx - 2 - k = 0$$

$$-2kx - 2x + 2k + 2 - 6\,(k-1)\,x^2 + 9kx - 6 - 3k = 0$$

$$6\,(1-k)\,x^2 + x\,(7k-2) - k - 4 = 0$$

$$\Delta = (7k-2)^2 + 24\,(1-k)(k+4) = 0$$

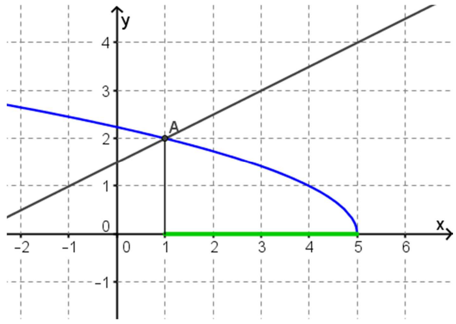
$$49\,k^2 - 28\,k + 4 + 24\,k + 96 - 24\,k^2 - 96\,k = 0$$

$$25\,k^2 - 100\,k + 100 = 0 \qquad 25\,(k-2)^2 = 0 \qquad \boldsymbol{k = 2}$$

4. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{-x+5} \leq \frac{3+x}{2}$.

Considero l'arco di parabola e la retta di equazione, rispettivamente:

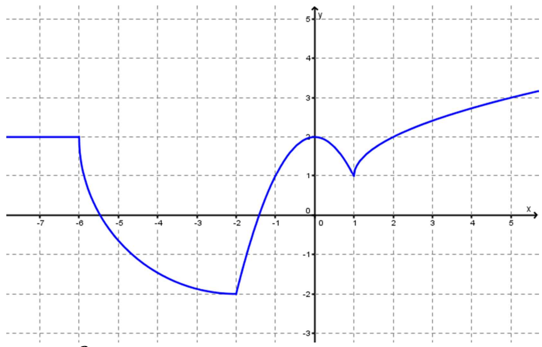
$$y = \sqrt{-x+5} \qquad\qquad y = \frac{3+x}{2}$$



L'arco di parabola è dato dalla parabola di vertice $V\ (5;0)$, con asse di simmetria coincidente con l'asse x, con concavità rivolta nel verso negativo dell'asse x, ma ne considero solo la parte superiore. Dopo aver rappresentato anche la retta, determino il punto di intersezione A di ascissa 1. La soluzione è indicata in verde nel disegno:

$$\mathbf{1 \leq x \leq 5}$$

5. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:



La prima è una retta parallela all'asse x di equazione: $y = 2$.

La seconda è un arco di circonferenza di centro $(-2;2)$ e raggio 4:

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$(y-2)^2 = 16 - x^2 - 4x - 4$$

$$y = 2 - \sqrt{12 - x^2 - 4x}$$

La terza è un arco di parabola di vertice $(0;2)$ e passante per il punto $(1;1)$:

$$y = ax^2 + 2$$

$$1 = a + 2 \qquad a = -1 \qquad y = -x^2 + 2$$

L'ultimo è un arco di una parabola con asse parallelo all'asse x e di vertice $(1;1)$ passante per il punto $(2;2)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 1 = a + b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ -a + c = 1 \\ c = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \qquad x = y^2 - 2y + 2$$

$$x = y^2 - 2y + 1 + 1 \qquad x - 1 = (y-1)^2 \qquad y = 1 + \sqrt{x-1}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} 2 & x < -6 \\ 2 - \sqrt{12 - x^2 - 4x} & -6 \leq x < -2 \\ -x^2 + 2 & -2 \leq x < 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}}$$