

1. Dopo aver determinato l'equazione della parabola tangente alla retta $y = -2x + 5$ nel suo punto di ascissa 2 e passante per il punto di ordinata -3 dell'asse y , verifica che il suo vertice appartiene alla retta $y = -3x + 6$. Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dal punto di tangenza e dall'intersezione della parabola con l'asse y .

Per determinare l'equazione della parabola tangente alla retta nel punto $T(2,1)$, considero innanzi tutto il fascio di parabole tangenti a una retta nota in un punto dato:

$$y = -2x + 5 + k(x - 2)^2$$

Determino la parabola richiesta, sostituendo nell'equazione del fascio il punto dell'asse y di ordinata -3 :

$$-3 = 5 + 4k \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

Ovvero:

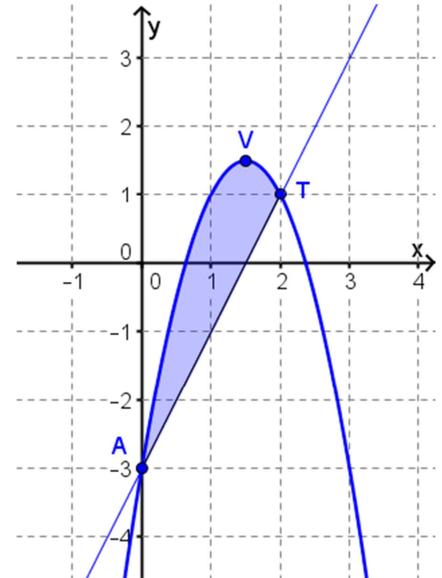
$$y = -2x^2 + 6x - 3$$

Determino il vertice della parabola:

$$V\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Per verificare l'appartenenza del vertice alla retta $y = -3x + 6$, sostituisco le coordinate del vertice nell'equazione della retta, ottenendone un'identità:

$$\frac{3}{2} = -\frac{9}{2} + 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{c. v. d.}$$



Per determinare l'area del segmento parabolico, calcolo innanzi tutto il coefficiente angolare della retta AT , avendo indicato con A il punto di intersezione della parabola con l'asse y :

$$m = \frac{1 + 3}{2 - 0} = 2$$

Determino ora la parallela al segmento AT tangente alla parabola, usando il fascio di rette parallele, mettendolo a sistema con la parabola e ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 6x - 3 \\ y = 2x + q \end{cases} \quad 2x^2 - 4x + 3 + q = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 2(3 + q) = 0 \quad q = -1 \quad t: y = 2x - 1$$

Per calcolare l'area del segmento parabolico, devo calcolare l'area del rettangolo nel quale è inscritto e di cui il segmento è $i/2/3$. Calcolo quindi la distanza di A dalla retta tangente t (altezza del rettangolo), la distanza AT (base del rettangolo) e dal loro prodotto ottengo l'area:

$$h = d(A; t) = \frac{|-3 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \overline{AT} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{8}{3}$$

2. Sia data la parabola di equazione $y = -x^2 - 2x + 8$. Indicati con A e B i punti di intersezione della parabola con l'asse x e con C l'intersezione con l'asse y, determina sull'arco AC di parabola un punto P tale che l'area del quadrilatero ABCP sia 32.

Determino innanzi tutto i punti richiesti:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 8 \\ y = 0 \end{cases} \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

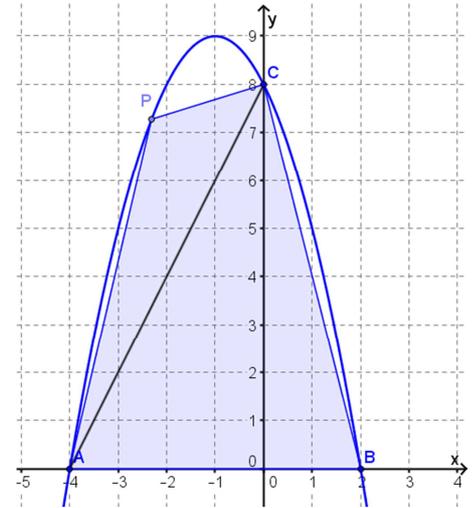
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases} \quad A(-4; 0) \quad B(2; 0)$$

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 8 \\ x = 0 \end{cases} \quad C(0; 8)$$

Posso calcolare l'area del triangolo ABC e sottrarla poi da quella del quadrilatero:

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$A_{ACP} = A_{ABCP} - A_{ABC} = 32 - 24 = 8$$



Determino la lunghezza del segmento AC e, usando la formula inversa dell'area del triangolo ACP, posso determinare la distanza di P da AC:

$$y = \frac{8-0}{0+4}x + 8 \quad y = 2x + 8$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$A_{ACP} = \frac{d(P; AC) \cdot \overline{AC}}{2} \Rightarrow d(P; AC) = 2 \frac{A_{ACP}}{\overline{AC}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Calcolo la distanza di P dalla retta AC e la pongo uguale al valore appena determinato:

$$d(P; AC) = \frac{|y - 2x - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Considerato che il punto P si trova nel semipiano positivo determinato dalla retta AC, la condizione diventa:

$$y - 2x - 8 = 4 \quad y - 2x - 12 = 0$$

Metto a sistema la condizione appena trovata con l'equazione della parabola, per determinare le coordinate di P:

$$\begin{cases} y = 2x + 12 \\ y = -x^2 - 2x + 8 \end{cases} \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \quad (x+2)^2 = 0 \quad x = -2$$

$$P(-2; 8)$$

3. Dopo aver studiato il fascio di equazione: $(k + 1)y - 2(k - 1)x^2 + 3kx - 2 - k = 0$, determina il valore del parametro per il quale la parabola:
- passa per il punto $P(0; 2)$;
 - ha asse di simmetria $x = -3$;
 - è tangente alla retta $2x + 3y - 2 = 0$.

Determino innanzi tutto le due generatrici:

$$ky + y - 2kx^2 + 2x^2 + 3kx - 2 - k = 0$$

$$y + 2x^2 - 2 + k(y - 2x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$y = -2x^2 + 2 \quad y = 2x^2 - 3x + 1$$

Determino le due parabole degeneri:

$$k = -1: \quad 4x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (x - 1)(4x + 1) = 0$$

$$k = 1: \quad 2y + 3x - 3 = 0$$

La prima parabola degenera ci dice che si tratta di un fascio di parabole secanti, con punti base di ascissa, rispettivamente:

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -\frac{1}{4}$$

Per determinare le coordinate dei punti, sostituisco le ascisse nella seconda parabola degenera:

$$A(1; 0) \quad B\left(-\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$$

- A. Per determinare l'equazione della parabola passante per il punto $P(0; 2)$, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$2k + 2 - 2 - k = 0 \quad k = 0$$

- B. Per determinare la parabola che ha asse di simmetria $x = -3$, bisogna determinare: $-\frac{b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a$

$$3k = -12(k - 1) \quad \Rightarrow \quad 15k = 12 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{5}$$

- C. Metto a sistema l'equazione del fascio con quella del fascio di parabole e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} (k + 1)y - 2(k - 1)x^2 + 3kx - 2 - k = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \quad (k + 1)\left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) - 2(k - 1)x^2 + 3kx - 2 - k = 0$$

$$-2kx - 2x + 2k + 2 - 6(k - 1)x^2 + 9kx - 6 - 3k = 0$$

$$6(1 - k)x^2 + x(7k - 2) - k - 4 = 0$$

$$\Delta = (7k - 2)^2 + 24(1 - k)(k + 4) = 0$$

$$49k^2 - 28k + 4 + 24k + 96 - 24k^2 - 96k = 0$$

$$25k^2 - 100k + 100 = 0 \quad 25(k - 2)^2 = 0 \quad k = 2$$

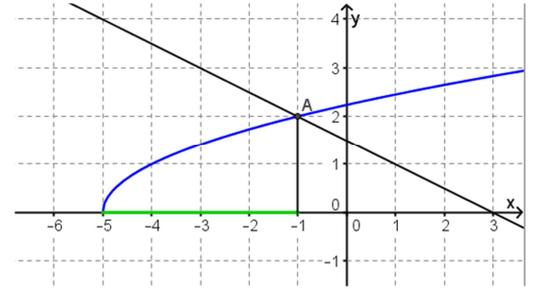
4. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{x+5} \leq \frac{3-x}{2}$.

Considero l'arco di parabola e la retta di equazione, rispettivamente:

$$y = \sqrt{x+5} \qquad y = \frac{3-x}{2}$$

L'arco di parabola è dato dalla parabola di vertice $V(-5; 0)$, con asse di simmetria coincidente con l'asse x , con concavità rivolta nel verso positivo dell'asse x , ma ne considero solo la parte superiore. Dopo aver rappresentato anche la retta, determino il punto di intersezione A di ascissa 1. La soluzione è indicata in verde nel disegno:

$$-5 \leq x \leq -1$$



5. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:

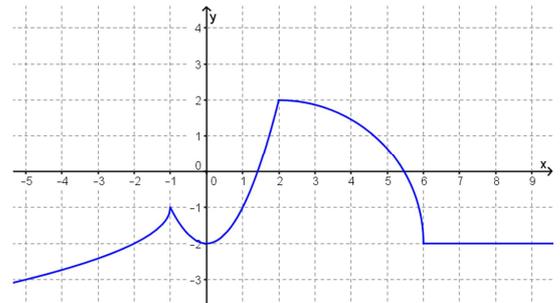
L'ultima è una retta parallela all'asse x di equazione: $y = -2$.

La terza è un arco di circonferenza di centro $(2; -2)$ e raggio 4:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+2)^2 &= 4^2 \\ (y+2)^2 &= 16 - x^2 + 4x - 4 \\ y &= -2 + \sqrt{12 - x^2 + 4x} \end{aligned}$$

La seconda è un arco di parabola di vertice $(0; -2)$ e passante per il punto $(-1; -1)$:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 2 \\ -1 &= a - 2 \qquad a = 1 \qquad y = x^2 - 2 \end{aligned}$$



Il primo è un arco di una parabola con asse parallelo all'asse x e di vertice $(-1; -1)$ passante per il punto $(-2; -2)$:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ -1 = a - b + c \\ -2 = 4a - 2b + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2a \\ -a + c = -1 \\ c = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases} \quad x = -y^2 - 2y - 2$$

$$-x = y^2 + 2y + 1 + 1 \qquad -x - 1 = (y + 1)^2 \qquad y = -1 - \sqrt{-x - 1}$$

Riassumendo:

$$y = \begin{cases} -1 - \sqrt{-x - 1} & x < -1 \\ x^2 - 2 & -1 \leq x < 2 \\ -2 + \sqrt{12 - x^2 + 4x} & 2 \leq x < 6 \\ -2 & x \geq 6 \end{cases}$$