1. Una ruota panoramica di un parco di divertimenti raggiunge la velocità angolare di 0,24 rad/s partendo da ferma e accelerando con un'accelerazione angolare media di 0,030 rad/s^2. Quanto tempo impiega per raggiungere la velocità angolare finale?

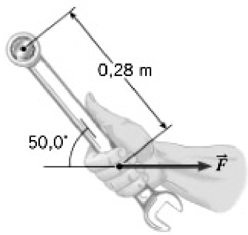
$$\omega_o = 0\,rad/s \qquad \omega = 0{,}24\,rad/s \qquad \alpha = 0{,}030\,rad/s^2 \qquad t?$$

Applicando la definizione di accelerazione angolare, ricavo il tempo:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \mathbf{8,0\ s}$$

2. Per stringere una candela nel suo alloggiamento nel motore, il manuale di istruzioni indica che deve essere applicato un momento torcente di 45 Nm. Usando di dati indicati nella figura 1, calcola il modulo F della forza che si deve applicare alla chiave inglese.

$$M = 45\,Nm \qquad \alpha = 130° \qquad r = 0{,}28\,m \qquad F?$$



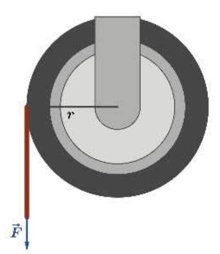
Applicando la definizione di momento torcente:

$$M = Fr\,sen\alpha \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{M}{r\,sen\alpha} = \mathbf{2,1 \cdot 10^2\ N}$$

3. Una forza di intensità 15 N viene applicata a una corda avvolta intorno a una carrucola, assimilabile a un disco omogeneo di massa 4,0 kg e di raggio 3,0 m, come in figura 2. La carrucola può ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro con attrito trascurabile ed è inizialmente ferma. Qual è la velocità angolare acquistata dalla carrucola, dopo che la forza ha agito su di essa per 3,0 s? Quanto vale, considerando sempre il medesimo istante, la velocità di un punto posto sul bordo della carrucola?

$$F = 15\,N \qquad m = 4{,}0\,kg \qquad r = 0{,}30\,m \qquad \omega_o = 0\,rad/s \qquad t = 3{,}0\,s \qquad \omega? \qquad v?$$

Il momento torcente è dato dal prodotto tra momento d'inerzia e accelerazione angolare o dal prodotto tra forza e raggio, perciò posso determinare il valore dell'accelerazione angolare, sapendo che il momento d'inerzia è quello di un disco pieno ($I = \frac{1}{2}mr^2$) e ricorrendo alla definizione di accelerazione angolare:



$$I\alpha = Fr \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{\omega - \omega_o}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \alpha t = \frac{Frt}{I} = \mathbf{7,5\ rad/s}$$

$$v = \omega r = \mathbf{23\ m/s}$$

4. Un cilindro pieno, che ruota intorno al suo asse di simmetria con velocità angolare uguale a 150 rad/s, è soggetto a un momento sull'asse di intensità 10 Nm. Se il raggio del cilindro misura 60 cm e la sua massa è pari a 120 kg, quanto tempo impiega per fermarsi? (Esprimi il risultato in minuti)

$$\omega_o = 150\,rad/s \qquad M = 10\,Nm \qquad r = 60\,cm \qquad m = 120\,kg \qquad \omega = 0\,rad/s \qquad t?$$

Dal secondo principio della dinamica per il moto rotazionale:

$$M = -I\alpha = -\frac{1}{2}mr^2\frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{mr^2\,\omega_o}{2\,t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{mr^2\,\omega_o}{2\,M} = \mathbf{5,4\ min}$$

5. Durante l'orbita intorno al Sole, la cometa di Halley passa da una distanza massima dal Sole di $5{,}2 \cdot 10^{12}\ m$ a una distanza minima di $8{,}8 \cdot 10^{10}\ m$. La sua velocità nel punto più lontano dal Sole vale $9{,}1 \cdot 10^{2}\ m/s$. Quanto vale la velocità della cometa nel punto più vicino al Sole?

$$r_1 = 5{,}2 \cdot 10^{12}\ m \qquad r_2 = 8{,}8 \cdot 10^{10}\ m \qquad v_1 = 9{,}1 \cdot 10^{2}\ m/s \qquad v_2?$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad m r_1 v_1 = m r_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2} = \mathbf{5,4 \cdot 10^4\ m/s}$$

6. Un disco circolare gira attorno ad un asse verticale compiendo 3000 giri/min. Due dischi fermi e identici al primo cadono sopra il disco in rotazione e iniziano a ruotare tutti insieme. Qual è la velocità angolare finale?

$$f_1 = 3000\ giri/min \qquad m_1 = m \qquad m_2 = 3m \qquad \omega_2?$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1 r^2\, 2\pi f_1 = \frac{1}{2}m_2 r^2 \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{m_1\, 2\pi\, f_1}{m_2} = \frac{m\, 2\pi\, f_1}{3m} = \mathbf{105\ rad/s}$$

7. Una pedana circolare girevole di massa pari a $2{,}0 \cdot 10^{2}\ kg$ e raggio 3,0 m, che ruota con una velocità di 4,0 rad/s, è assimilabile a un disco omogeneo. Una donna di massa 60 kg, che corre tangenzialmente alla pedana a una velocità di 3,0 m/s, ci salta sopra rimanendo ferma sul suo bordo esterno. Calcola la velocità finale della pedana rispetto al centro di rotazione.

$$m_1 = 2{,}0 \cdot 10^{2}\ kg \qquad r = 3{,}0\ m \qquad \omega_1 = 4{,}0\ rad/s \qquad m_2 = 60\ kg \qquad v = 3{,}0\ m/s \qquad \omega_2?$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 r v + I_1\omega_1 = I_1\omega_2 + m_2 r^2 \omega_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 v + \frac{1}{2}m_1 r\omega_1 = \frac{1}{2}m_1 r\omega_2 + m_2 r\omega_2$$

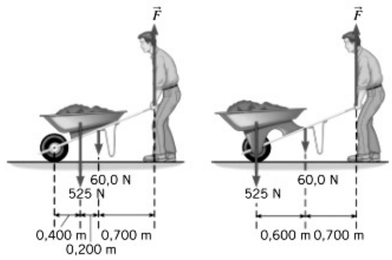
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{2m_2 v + m_1 r\omega_1}{m_1 r + 2\, m_2 r} = \mathbf{2,9\ rad/s}$$

8. Entrambe le carriole mostrate in figura 3 pesano 60,0 N e il loro carico è 525 N. Quello che le differenzia è la distribuzione del carico. Considera un asse di rotazione che passi per il punto di contatto della ruota con il terreno e la cui direzione sia perpendicolare alla pagina. Determina il modulo della forza F che deve esercitare la persona che sostiene la carriola nei due casi.

$$P_1 = 525\ N \qquad P_2 = 60{,}0\ N$$

$$r_1 = 0{,}400\ m \qquad r_2 = 0{,}600\ m \qquad r_3 = 1{,}300\ m$$

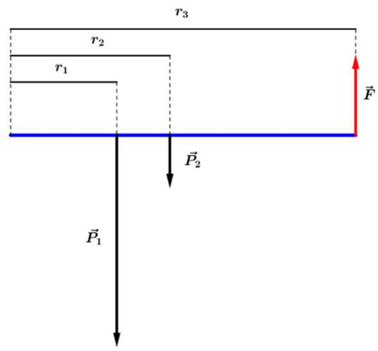
$$r'_1 = 0{,}000\ m \qquad r'_2 = 0{,}600\ m \qquad r'_3 = 1{,}300\ m$$



La prima situazione può essere schematizzata come nelle leve indicate a lato. Perché ci sia equilibrio, la somma dei momenti agenti nell'estremo sinistro della barra blu deve essere nulla, perciò:

$$P_1 r_1 + P_2 r_2 - F r_3 = 0$$

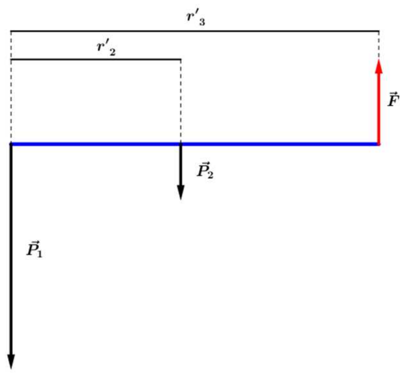
$$F = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2}{r_3} = \mathbf{189\ N}$$



La seconda situazione può essere schematizzata come nelle leve indicate a lato. Perché ci sia equilibrio, la somma dei momenti agenti nell'estremo sinistro della barra blu (punto di applicazione del peso del carico) deve essere nulla, perciò:

$$P_1 r'_1 + P_2 r'_2 - F' r'_3 = 0$$

$$F' = \frac{P_2 r'_2}{r'_3} = \mathbf{27{,}7\ N}$$



9. Ci sono quattro oggetti con la stessa massa e lo stesso raggio: una sfera piena, una sfera cava, un guscio cilindrico e un cilindro pieno. Tutti ruotano senza strisciare su una superficie orizzontale. Quando arrivano alla base di un piano inclinato, i centri di massa dei quattro oggetti hanno tutti la stessa velocità. Chi arriva più in alto? Ordina gli oggetti in base all'altezza raggiunta: qual è il rapporto delle altezze tra il primo e il quarto classificato?

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m \qquad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r \qquad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v$$

$$I_1 = \frac{2}{5}mr^2 \qquad I_2 = \frac{2}{3}mr^2 \qquad I_3 = mr^2 \qquad I_4 = \frac{1}{2}mr^2$$

Per il principio di conservazione dell'energia:

$$U_1 = \frac{1}{2}I_1\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad mgh_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{7}{10}\cdot\frac{v^2}{g}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}I_2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad mgh_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{v^2}{g}$$

$$U_3 = \frac{1}{2}I_3\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad mgh_3 = \frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad h_3 = \frac{v^2}{g}$$

$$U_4 = \frac{1}{2}I_4\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad mgh_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad h_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{v^2}{g}$$

Dato che $\frac{7}{10} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < 1$ possiamo dedurne:

$$\boldsymbol{h_1 < h_4 < h_2 < h_3}$$

Arriva più in alto il guscio cilindrico e il rapporto tra l'altezza raggiunta dal guscio cilindrico e quella raggiunta dalla sfera piena è:

$$\frac{h_3}{h_1} = \frac{\frac{v^2}{g}}{\frac{7}{10}\cdot\frac{v^2}{g}} = \boldsymbol{\frac{10}{7}}$$