1. Calcola la derivata di $y = \cos x$ usando la definizione di derivata.

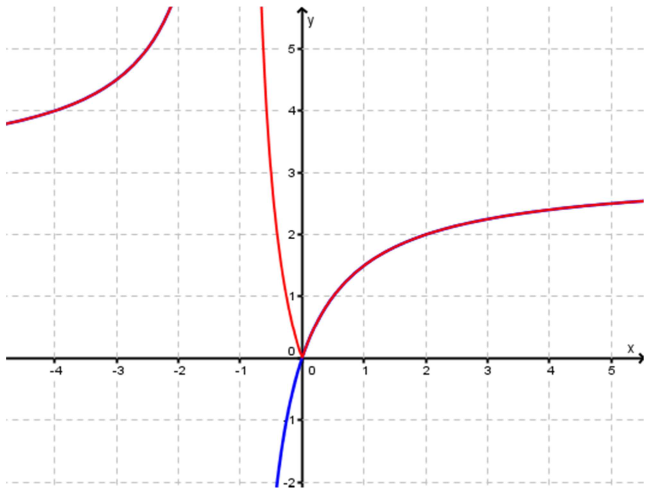
$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - senx\ sen\ h - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{sen\ xsenh}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,(\cos h-1)(\cos h+1)}{h\,(\cos h+1)} - sen\ x = \cos x \lim_{h\to 0}\frac{-sen\ h\cdot sen\ h}{h\,(\cos h+1)} - sen\ x = -sen\ x$$

2. Disegna il grafico delle seguenti funzioni e per ciascuna indica i punti del dominio nei quali esse non sono derivabili, specificando di che tipo di punto si tratta:

$$y = \left|\frac{3x}{x+1}\right| \qquad\qquad y = \begin{cases}\sqrt{9-x^2} & -3 < x \le 3\\ \sqrt{x-3} & x > 3\end{cases}$$

Si tratta di una iperbole omografica, presa in modo che i suoi punti abbiano ordinata positiva (perciò dove hanno ordinata negativa la funzione subisce una riflessione rispetto all'asse x). Pare che nel punto di ascissa 0 ci sia un punto angoloso, verifichiamolo calcolando le due derivate nel punto 0:



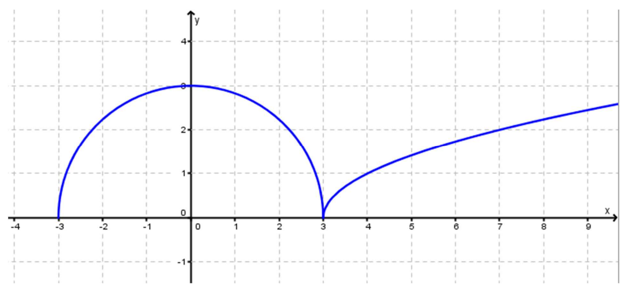
$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{3x}{x+1} & se\ x < -1 \vee x \ge 0\\[2mm] \dfrac{-3x}{x+1} & se\ -1 < x < 0\end{cases}$$

$$f'_-(0) = \frac{-3}{(0+1)^2} = -3$$

$$f'_+(0) = \frac{3}{(0+1)^2} = 3$$

$$\boldsymbol{O(0;0)}\ \text{è}\ \boldsymbol{un\ punto\ angoloso}$$

Si tratta di una semicirconferenza e di una parabola di asse coincidente con l'asse x, di cui si prende solo la parte superiore. Pare che nel punto di ascissa 3 ci sia una cuspide, verifichiamolo calcolando le due derivate nel punto 3:



$$f'(x) = \begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} & -3 < x < 3\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} & x > 3\end{cases}$$

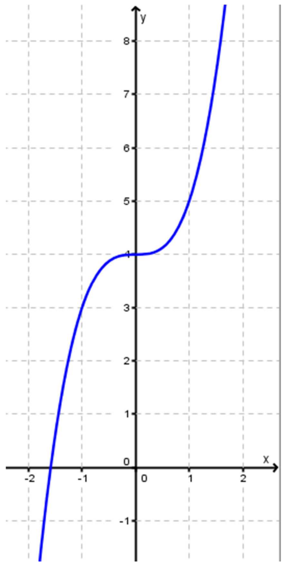
Calcolando il limite, otteniamo:

$$f'_-(3) = -\infty \qquad f'_+(3) = +\infty$$

$$\boldsymbol{P(3;0)}\ \text{è}\ \boldsymbol{una\ cuspide}$$

3. Traccia il grafico delle seguenti funzioni, verificando che sono invertibili nel loro dominio e calcola $Df^{-1}(y_o)$ nei punti indicati:

$$f(x) = x^3 + 4 \qquad y_o = 12; \qquad\qquad f(x) = \frac{x-6}{x-4} \qquad y_o = -1$$



La funzione è invertibile, perché suriettiva e monotona crescente in tutto il dominio

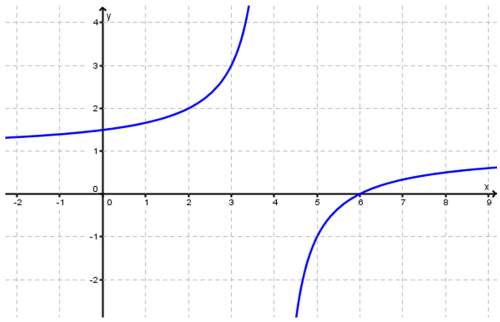
Ricaviamo la formula della funzione inversa:

$$y = x^3 + 4 \qquad x^3 = y - 4$$

L'espressione della funzione inversa è:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-4}$$

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-4)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad Df^{-1}(12) = \mathbf{\frac{1}{12}}$$



La funzione è invertibile, perché suriettiva e monotona decrescente in tutto il dominio.

Ricaviamo la formula della funzione inversa:

$$y = \frac{x-6}{x-4} \qquad xy - 4y = x - 6 \qquad x(y-1) = 4y - 6$$

L'espressione della funzione inversa è:

$$f^{-1}(y) = \frac{4y-6}{y-1}$$

$$Df^{-1}(y) = \frac{4y - 4 - 4y + 6}{(y-1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad Df^{-1}(-1) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

4. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = ln\frac{x+3x^2}{x+4}$ nel suo punto di ascissa 2.

Calcolo innanzi tutto la derivata:

$$f'(x) = \frac{x+4}{x+3x^2} \cdot \frac{(1+6x)(x+4) - (x+3x^2)}{(x+4)^2}$$

$$f'(2) = \frac{6}{14} \cdot \frac{78-14}{6^2} = \frac{16}{21}$$

Determiniamo quindi la retta tangente:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \qquad y - \ln\frac{7}{3} = \frac{16}{21}(x-2) \qquad \boldsymbol{y = \frac{16}{21}x - \frac{32}{21} + ln\frac{7}{3}}$$

5. Determina l'ascissa del punto nel quale la retta tangente al grafico della funzione $y = \ln\,(3x+1) - 4x$ ha coefficiente angolare -5.

Faccio la derivata della funzione e la pongo uguale al coefficiente angolare, in questo modo determinerò l'ascissa del punto risolvendo l'equazione ottenuta:

$$y' = \frac{3}{3x+1} - 4 = -5$$

$$\frac{3}{3x+1} = -1 \qquad \frac{3+3x+1}{3x+1} = 0 \qquad 3x+4=0 \qquad \boldsymbol{x = -\frac{4}{3}}$$

6. Trova l'angolo formato dalle due curve di equazioni $y = \frac{3x-1}{5-x}$ e $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}$.

Determino innanzi tutto l'ascissa del punto di intersezione delle due curve, ponendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-1}{5-x} \\ y = \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{8} \end{cases} \qquad \frac{3x-1}{5-x} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 5x^2 + 30x - 45 + 24x - 8 = 0 \qquad x^3 - 11\,x^2 + 63x - 53 = 0$$

Applicando l'algoritmo della divisione di Ruffini, con $x = 1$:

$$(x-1)(x^2 - 10\,x + 53) = 0$$

L'unica soluzione dell'equazione è $x = 1$.

Perciò calcolo il coefficiente angolare delle tangenti alle funzioni nel punto di ascissa 1:

$$tg\alpha = f'(x) = \frac{3(5-1)+1(3-1)}{(5-1)^2} = \frac{7}{8} \qquad tg\beta = g'(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

L'angolo formato dalle due curve:

$$\gamma = \alpha - \beta \quad \Rightarrow \quad tg\gamma = tg(\alpha - \beta) \quad \Rightarrow \quad \gamma = arctg\left|\frac{\frac{7}{8}+\frac{1}{2}}{1-\frac{7}{16}}\right| = \boldsymbol{arc\,tg\,\frac{22}{9}}$$

7. È data la curva di equazione $y = \frac{k+x}{x^2+1}$. Calcola il valore del parametro in modo che la tangente al suo grafico nel punto di ascissa 1 sia perpendicolare alla retta passante per i punti $A\,(5;3)$ e $B\,(2;1)$.

Determino il coefficiente angolare della retta passante per A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{2-5} = \frac{2}{3}$$

Perciò il coefficiente angolare della perpendicolare sarà $-\frac{3}{2}$.

Faccio la derivata della funzione e la calcolo nel punto di ascissa 1, dopodiché la poniamo uguale al coefficiente angolare, in questo modo determineremo il parametro risolvendo l'equazione ottenuta:

$$y' = \frac{x^2+1-2x\,(k+x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2-2k-2}{4} = -\frac{3}{2} \qquad -2k = -6 \qquad 2k = 6 \qquad \boldsymbol{k = 3}$$

8. Due corpi si muovono seguendo le leggi orarie $s_1 = t^2 - 6t + 4$ e $s_2 = \frac{3}{4}t^2 + 2$. Calcola in quale istante il secondo ha velocità tripla rispetto al primo.

Determiniamo le due velocità in funzione del tempo, calcolando la derivata prima della legge oraria rispetto al tempo:

$$v_1 = 2t - 6 \qquad\qquad v_2 = \frac{3}{2}t$$

Poniamo la seconda velocità uguale al triplo della prima, per ricavare l'istante di tempo:

$$\frac{3}{2}t = 3\,(2t-6) \qquad\qquad \frac{1}{2}t = 2t - 6 \qquad\qquad t = \mathbf{4s}$$

9. Calcola le seguenti derivate:

$$D\left(6x\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^3}\right) = D\left(6\,x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{5}}\right) = 9x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \mathbf{9\sqrt{x} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}}$$

$$D\left((3x + lnx)\,cosx\right) = \mathbf{\left(3 + \frac{1}{x}\right)cos\,x - (3x + \,lnx)sen\,x}$$

$$D\left(x^5(3x-4)(x^2+1)\right) = 5x^4(3x-4)(x^2+1) + 3x^5(x^2+1) + x^5(3x-4)(2x) =$$

$$= x^4(15x^3 + 15x - 20x^2 - 20 + 3x^3 + 3x + 6x^3 - 8x^2) = \mathbf{2x^4(12x^3 - 14\,x^2 + 9x - 10)}$$

$$D\left(\frac{4x}{2x^4 - x^2 - 1}\right) = \frac{4(2x^4 - x^2 - 1) - 4x(8x^3 - 2x)}{(2x^4 - x^2 - 1)^2} = \mathbf{4\,\frac{-6x^4 + x^2 - 1}{(2x^4 - x^2 - 1)^2}}$$

$$D\left(\frac{senx - \cos x}{sen\,x + \cos x}\right) = \frac{(\cos x + sen\,x)(senx + \cos x) - (sen\,x - \cos x)(\cos x - senx)}{(sen\,x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x + 2senx\cos x + sen^2 x + \cos^2 x - 2\,senx\cos x}{1 + 2\,sen\,x\cos x} = \mathbf{\frac{2}{1 + sen\,2x}}$$

$$D\,(ctg\,3x) = \mathbf{-\frac{3}{sen^2 3x}}$$

$$D\,(\ln sen^2 x) = D\,(2\ln sen\,x) = \frac{2}{sen\,x}(cos\,x) = \mathbf{2\,ctg\,x}$$

$$D\left(\frac{5}{(8x-1)^2}\right) = 5\,D\,((8x-1)^{-2}) = -10\,(8x-1)^{-3}\,8 = \mathbf{-\frac{80}{(8x-1)^3}}$$

$$D\left(\ln\frac{2+x}{2-x}\right) = \frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{1(2-x) + (2+x)}{(2-x)^2} = \mathbf{\frac{4}{4 - x^2}}$$

$$D\left(e^{2\sqrt{x}} + \ln\sqrt[6]{x^5}\right) = D\left(e^{2\sqrt{x}} + \frac{5}{6}\ln x\right) = \mathbf{\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{5}{6x}}$$

$$D\left(\frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}\right) = D\,(\cos^2 x - sen^2 x\,) = D(\cos 2x) = \mathbf{-2\,sen\,2x}$$

$$D\left(\ln\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}}\right) = \frac{1}{2}D\left(\ln\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}\cdot\frac{2\cos x\,sen\,x\,(1 + \cos^2 x) + 2\cos x\,sen\,x\,(1 - \cos^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2} = \mathbf{\frac{2ctg\,x}{1 + \cos^2 x}}$$

$$D\left(3\,arc\,ctg\,\sqrt{x}\right) = -\frac{3}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \mathbf{-\frac{3}{2\sqrt{x}\,(1+x)}}$$

$$D\,(arcsen\,(sen\,2x)) = D\,(2x) = \mathbf{2}$$