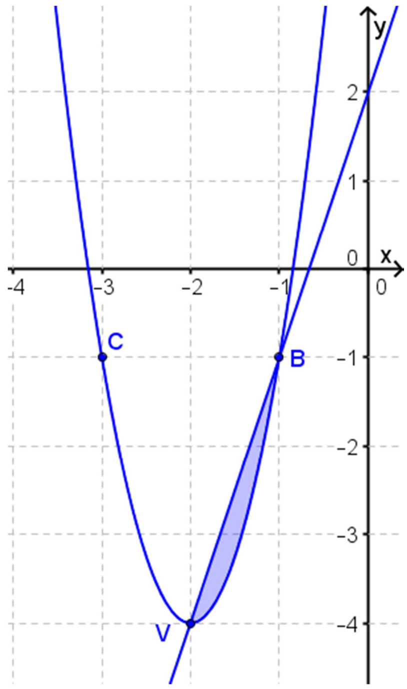
1. Dopo aver determinato l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $A\ (-4;\ 8)$, $B\ (-1;\ -1)$ e $C\ (-3;\ -1)$, verifica che il suo vertice appartiene alla retta $y = 3x + 2$. Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dal vertice e dal punto B.



Dati i punti B e C che hanno la stessa ordinata, essi sono simmetrici rispetto all'asse di simmetria, che ha quindi equazione:

$$x = -2$$

Perciò, devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ -1 = a - b + c \\ 8 = 16a - 4b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4a \\ c - 3a = -1 \\ c = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = 12 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{y = 3x^2 + 12x + 8}$$

Determino il vertice della parabola:

$$V\ (-2; -4\ )$$

Per verificare l'appartenenza del vertice alla retta $y = 3x + 2$, sostituisco le coordinate del vertice nell'equazione della retta, ottenendone un'identità:

$$-4 = -6 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad -4 = -4 \qquad c.v.d.$$

Per determinare l'area del segmento parabolico, calcolo innanzi tutto il coefficiente angolare della retta BV:

$$m = \frac{-1+4}{-1+2} = 3$$

Determino ora la parallela al segmento BV tangente alla parabola, usando il fascio di rette parallele, mettendolo a sistema con la parabola e ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 12x + 8 \\ y = 3x + q \end{cases} \qquad 3x^2 + 9x + 8 - q = 0$$

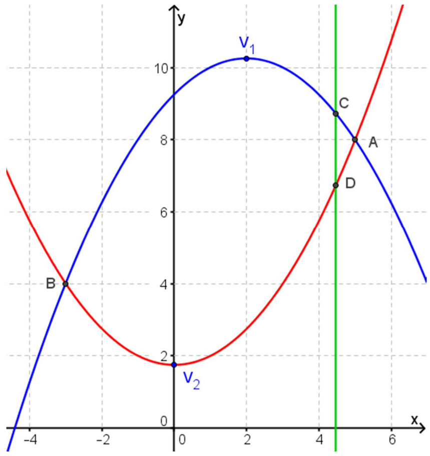
$$\Delta = 81 - 12\ (8 - q) = 0 \qquad q = \frac{5}{4} \qquad t: y = 3x + \frac{5}{4}$$

Per calcolare l'area del segmento parabolico, devo calcolare l'area del rettangolo nel quale è inscritto e di cui il segmento è i 2/3. Calcolo quindi la distanza di B dalla retta tangente t (altezza del rettangolo), la distanza BV (base del rettangolo) e dal loro prodotto ottengo l'area:

$$h = d\ (B; t) = \frac{\left|-1 + 3 - \frac{5}{4}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{4\sqrt{10}} \qquad \overline{BV} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2. Date le parabole di equazione $y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{37}{4}$ e $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}$, conduci una retta parallela all'asse y nella parte di piano delimitata dalle parabole, in modo che, intersecando le due parabole, formi un segmento di lunghezza 2.



Considero la generica retta parallela all'asse y di equazione $x=k$ e determino le sue intersezioni con le parabole date:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{37}{4} \\ x=k \end{cases} \qquad C\left(k;\ -\frac{1}{4}k^2+k+\frac{37}{4}\right)$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4} \\ x=k \end{cases} \qquad D\left(k;\ \frac{1}{4}k^2+\frac{7}{4}\right)$$

Pongo la distanza tra i due punti uguale a 2:

$$\overline{CD}=-\frac{1}{4}k^2+k+\frac{37}{4}-\frac{1}{4}k^2-\frac{7}{4}=2$$

Posso calcolare la distanza senza bisogno del valore assoluto, perché tra le due intersezioni delle parabole, il punto C avrà sempre ordinata maggiore rispetto a D.

$$-\frac{1}{2}k^2+k+\frac{15}{2}=2$$

$$k^2-2k-11=0 \qquad k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{1}=\mathbf{1\pm 2\sqrt{3}}$$

Determino i punti di intersezione tra le due parabole per avere la garanzia che i due valori determinati per k siano effettivamente compresi tra le loro ascisse:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{37}{4} \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}x^2-x-\frac{37}{4}=0$$

$$x^2-2x-15=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm 4}{1}=\left\langle \begin{matrix}5\\-3\end{matrix}\right. \qquad A\,(5;8) \quad B\,(-3;4)$$

È quindi verificato che:

$$-3<1-2\sqrt{3}<5 \qquad -3<1+2\sqrt{3}<5$$

Perciò le due rette sono:

$$\boldsymbol{x=1-2\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{x=1+2\sqrt{3}}$$

3. Dopo aver studiato il fascio di equazione: $(k-1)x^2+(1-3k)x+(1+k)y+k-1=0$, determina il valore del parametro per il quale la parabola:
   A. abbia vertice sulla retta $x=2$;
   B. sia tangente alla retta $y=-x$;
   C. passi per il punto di intersezione delle rette $y=x+3$ e $3x+y-11=0$.

Determino innanzi tutto le due generatrici:

$$kx^2-x^2+x-3kx+y+ky+k-1=0$$

$$y-x^2+x-1+k\,(y+x^2-3x+1)=0$$

$$\boldsymbol{y=x^2-x+1} \qquad \boldsymbol{y=-x^2+3x-1}$$

Determino le due parabole degeneri:

$$k=-1: \qquad -2x^2+4x-2=0 \qquad \boldsymbol{(x-1)^2=0}$$

$$k=1: \qquad \boldsymbol{x-y=0}$$

La prima parabola degenere ci dice che si tratta di un fascio di parabole tangenti alla seconda degenere, ovvero alla bisettrice di primo e terzo quadrante. Il punto di tangenza ha coordinate: $T\ (1;1)$.

A. Per determinare l'equazione della parabola che ha asse di simmetria $x=2$, bisogna determinare: $-\frac{b}{2a}=2 \quad \Rightarrow \quad b=-4a$

$$1-3k=-4k+4 \qquad \boldsymbol{k=3}$$

B. Metto a sistema l'equazione della retta con quella del fascio di parabole e pongo $\Delta=0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases}(k-1)x^2+(1-3k)x+(1+k)y+k-1=0\\ y=-x\end{cases} \qquad (k-1)x^2+(1-3k)x-(1+k)x+k-1=0$$

$$(k-1)\,x^2-4kx+k-1=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=4k^2-(k-1)^2=0$$

$$4k^2-k^2+2k-1=0$$

$$3\,k^2+2\,k-1=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-1\pm 2}{3}=\begin{cases}-1 & non\ accettabile\\ \boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{cases}$$

C. Metto a sistema le equazioni delle due rette per determinare il loro punto di intersezione:

$$\begin{cases}y=x+3\\ 3x+y-11=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per il punto dato:

$$4\,(k-1)+2\,(1-3k)+5\,(1+k)+k-1=0$$

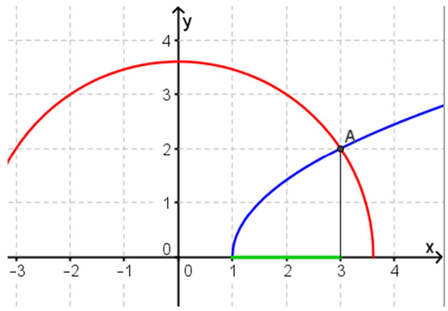
$$4k-4+2-6k+5+5k+k-1=0 \qquad k=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

4. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{13-x^2} \geq \sqrt{2x-2}$.

Considero l'arco di parabola e l'arco di circonferenza di equazioni, rispettivamente:

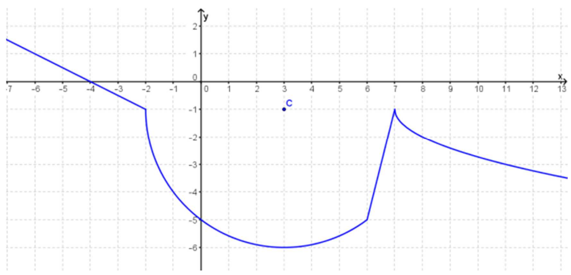
$$y = \sqrt{2x-2} \qquad\qquad y = \sqrt{13-x^2}$$

L'arco di parabola è dato dalla parabola di vertice $V\ (1;0)$, con asse di simmetria coincidente con l'asse x, con concavità rivolta nel verso positivo dell'asse x, ma ne considero solo la parte superiore. La circonferenza ha centro nell'origine e raggio $\sqrt{13}$. Il loro punto di intersezione, indicato con A nel disegno, ha ascissa 3. La soluzione è indicata in verde nel disegno:



$$\boldsymbol{1 \leq x \leq 3}$$

5. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:



La prima è una retta di equazione: $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

La seconda è un arco di circonferenza di centro $(3;-1)$ e raggio 5:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

$$(y+1)^2 = 25 - x^2 + 6x - 9$$

$$y = -1 - \sqrt{16 - x^2 + 6x}$$

La terza è una retta di coefficiente angolare 4 e passante per il punto $(7;\ -1)$:

$$y + 1 = 4\,(x-7)$$

$$y = 4x - 29$$

L'ultimo è un arco di una parabola con asse parallelo all'asse x e di vertice $(7;-1)$ passante per il punto $(8;-2)$:

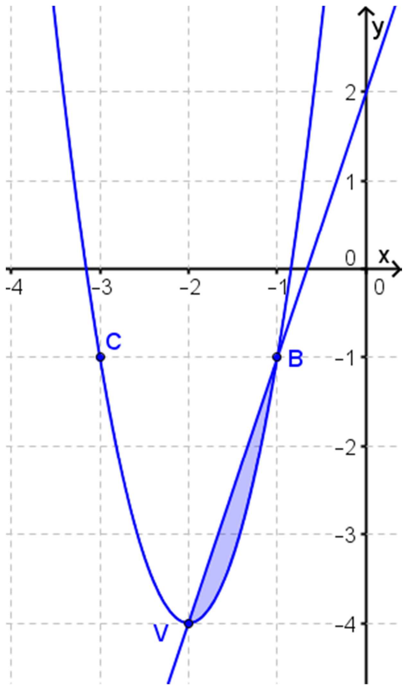
$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ 7 = a - b + c \\ 8 = 4a - 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a \\ -a + c = 7 \\ c = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 8 \end{cases} \qquad x = y^2 + 2y + 8$$

$$x = y^2 + 2y + 1 + 7 \qquad x - 7 = (y+1)^2 \qquad y = -1 - \sqrt{x-7}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 2 & x < -2 \\ -1 - \sqrt{16 - x^2 + 6x} & -2 \leq x < 6 \\ 4x - 29 & 6 \leq x < 7 \\ -1 - \sqrt{x-7} & x \geq 7 \end{cases}}$$

1. Dopo aver determinato l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $A\ (-4;\ 8)$, $B\ (-1;\ -1)$ e $C\ (-3;\ -1)$, verifica che il suo vertice appartiene alla retta $y = 3x + 2$. Calcola l'area del segmento parabolico delimitato dal vertice e dal punto B.



Dati i punti B e C che hanno la stessa ordinata, essi sono simmetrici rispetto all'asse di simmetria, che ha quindi equazione:

$$x = -2$$

Perciò, devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ -1 = a - b + c \\ 8 = 16a - 4b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4a \\ c - 3a = -1 \\ c = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = 12 \\ c = 8 \end{cases}$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{y = 3x^2 + 12x + 8}$$

Determino il vertice della parabola:

$$V\ (-2; -4\ )$$

Per verificare l'appartenenza del vertice alla retta $y = 3x + 2$, sostituisco le coordinate del vertice nell'equazione della retta, ottenendone un'identità:

$$-4 = -6 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad -4 = -4 \qquad c.v.d.$$

Per determinare l'area del segmento parabolico, calcolo innanzi tutto il coefficiente angolare della retta BV:

$$m = \frac{-1 + 4}{-1 + 2} = 3$$

Determino ora la parallela al segmento BV tangente alla parabola, usando il fascio di rette parallele, mettendolo a sistema con la parabola e ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 12x + 8 \\ y = 3x + q \end{cases} \qquad 3x^2 + 9x + 8 - q = 0$$

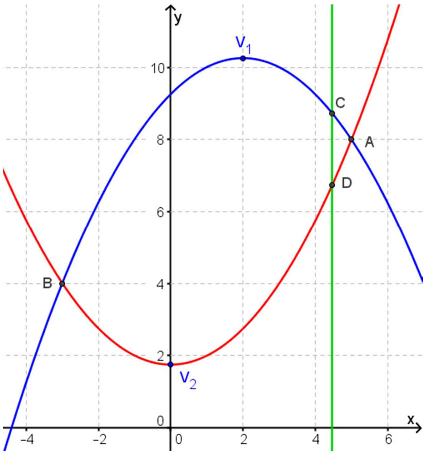
$$\Delta = 81 - 12\,(8 - q) = 0 \qquad q = \frac{5}{4} \qquad t: y = 3x + \frac{5}{4}$$

Per calcolare l'area del segmento parabolico, devo calcolare l'area del rettangolo nel quale è inscritto e di cui il segmento è i 2/3. Calcolo quindi la distanza di B dalla retta tangente t (altezza del rettangolo), la distanza BV (base del rettangolo) e dal loro prodotto ottengo l'area:

$$h = d\,(B; t) = \frac{\left|-1 + 3 - \frac{5}{4}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{4\sqrt{10}} \qquad \overline{BV} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2. Date le parabole di equazione $y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{37}{4}$ e $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}$, conduci una retta parallela all'asse y nella parte di piano delimitata dalle parabole, in modo che, intersecando le due parabole, formi un segmento di lunghezza 2.



Considero la generica retta parallela all'asse y di equazione $x=k$ e determino le sue intersezioni con le parabole date:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{37}{4} \\ x=k \end{cases} \qquad C\left(k;\,-\frac{1}{4}k^2+k+\frac{37}{4}\right)$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4} \\ x=k \end{cases} \qquad D\left(k;\,\frac{1}{4}k^2+\frac{7}{4}\right)$$

Pongo la distanza tra i due punti uguale a 2:

$$\overline{CD}=-\frac{1}{4}k^2+k+\frac{37}{4}-\frac{1}{4}k^2-\frac{7}{4}=2$$

Posso calcolare la distanza senza bisogno del valore assoluto, perché tra le due intersezioni delle parabole, il punto C avrà sempre ordinata maggiore rispetto a D.

$$-\frac{1}{2}k^2+k+\frac{15}{2}=2$$

$$k^2-2k-11=0 \qquad k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{1}=\mathbf{1\pm2\sqrt{3}}$$

Determino i punti di intersezione tra le due parabole per avere la garanzia che i due valori determinati per k siano effettivamente compresi tra le loro ascisse:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{37}{4} \end{cases} \qquad \frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}x^2-x-\frac{37}{4}=0$$

$$x^2-2x-15=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm4}{1}=\begin{cases}5\\-3\end{cases} \qquad A\,(5;8) \quad B\,(-3;4)$$

È quindi verificato che:

$$-3<1-2\sqrt{3}<5 \qquad -3<1+2\sqrt{3}<5$$

Perciò le due rette sono:

$$\boldsymbol{x=1-2\sqrt{3}} \qquad \boldsymbol{x=1+2\sqrt{3}}$$

3. Dopo aver studiato il fascio di equazione: $(k-1)x^2+(1-3k)x+(1+k)y+k-1=0$, determina il valore del parametro per il quale la parabola:
   A. abbia vertice sulla retta $x=2$;
   B. sia tangente alla retta $y=-x$;
   C. passi per il punto di intersezione delle rette $y=x+3$ e $3x+y-11=0$.

Determino innanzi tutto le due generatrici:

$$kx^2-x^2+x-3kx+y+ky+k-1=0$$

$$y-x^2+x-1+k\,(y+x^2-3x+1)=0$$

$$\boldsymbol{y=x^2-x+1} \qquad \boldsymbol{y=-x^2+3x-1}$$

Determino le due parabole degeneri:

$$k=-1: \qquad -2x^2+4x-2=0 \qquad \boldsymbol{(x-1)^2=0}$$

$$k=1: \qquad \boldsymbol{x-y=0}$$

La prima parabola degenere ci dice che si tratta di un fascio di parabole tangenti alla seconda degenere, ovvero alla bisettrice di primo e terzo quadrante. Il punto di tangenza ha coordinate: $T\ (1;1)$.

A. Per determinare l'equazione della parabola che ha asse di simmetria $x=2$, bisogna determinare: $-\frac{b}{2a}=2 \quad \Rightarrow \quad b=-4a$

$$1-3k=-4k+4 \qquad \boldsymbol{k=3}$$

B. Metto a sistema l'equazione della retta con quella del fascio di parabole e pongo $\Delta=0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases}(k-1)x^2+(1-3k)x+(1+k)y+k-1=0\\ y=-x\end{cases} \qquad (k-1)x^2+(1-3k)x-(1+k)x+k-1=0$$

$$(k-1)\,x^2-4kx+k-1=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=4k^2-(k-1)^2=0$$

$$4k^2-k^2+2k-1=0$$

$$3\,k^2+2\,k-1=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-1\pm 2}{3}=\begin{cases}-1 & non\ accettabile\\ \boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{cases}$$

C. Metto a sistema le equazioni delle due rette per determinare il loro punto di intersezione:

$$\begin{cases}y=x+3\\ 3x+y-11=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$$

Impongo il passaggio del fascio per il punto dato:

$$4\,(k-1)+2\,(1-3k)+5\,(1+k)+k-1=0$$

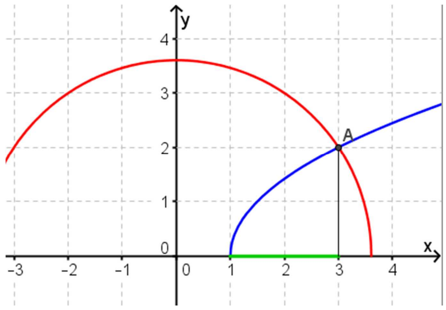
$$4k-4+2-6k+5+5k+k-1=0 \qquad k=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

4. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{13-x^2} \geq \sqrt{2x-2}$.

Considero l'arco di parabola e l'arco di circonferenza di equazioni, rispettivamente:

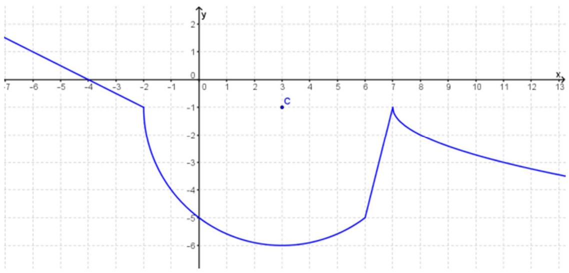
$$y = \sqrt{2x-2} \qquad\qquad y = \sqrt{13-x^2}$$

L'arco di parabola è dato dalla parabola di vertice $V\ (1; 0)$, con asse di simmetria coincidente con l'asse x, con concavità rivolta nel verso positivo dell'asse x, ma ne considero solo la parte superiore. La circonferenza ha centro nell'origine e raggio $\sqrt{13}$. Il loro punto di intersezione, indicato con A nel disegno, ha ascissa 3. La soluzione è indicata in verde nel disegno:



$$\boldsymbol{1 \leq x \leq 3}$$

5. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:



La prima è una retta di equazione: $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

La seconda è un arco di circonferenza di centro $(3; -1)$ e raggio 5:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

$$(y+1)^2 = 25 - x^2 + 6x - 9$$

$$y = -1 - \sqrt{16 - x^2 + 6x}$$

La terza è una retta di coefficiente angolare 4 e passante per il punto $(7;\ -1)$:

$$y + 1 = 4\,(x-7)$$

$$y = 4x - 29$$

L'ultimo è un arco di una parabola con asse parallelo all'asse x e di vertice $(7; -1)$ passante per il punto $(8; -2)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ 7 = a - b + c \\ 8 = 4a - 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a \\ -a + c = 7 \\ c = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 8 \end{cases} \qquad x = y^2 + 2y + 8$$

$$x = y^2 + 2y + 1 + 7 \qquad x - 7 = (y+1)^2 \qquad y = -1 - \sqrt{x-7}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - 2 & x < -2 \\ -1 - \sqrt{16 - x^2 + 6x} & -2 \leq x < 6 \\ 4x - 29 & 6 \leq x < 7 \\ -1 - \sqrt{x-7} & x \geq 7 \end{cases}}$$