1. $$\frac{6}{1-x^2}+\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{6}{x^2-x-2}$$

$$=\frac{6}{-(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x-2)(x-1)}-\frac{6}{(x-2)(x+1)}= \qquad C.E.:\begin{cases}x\neq\pm1\\x\neq 2\end{cases}$$

$$=\frac{-6(x-2)+2(x+1)-6(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{-6x+12+2x+2-6x+6}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{-10(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\boldsymbol{\frac{10}{1-x^2}}$$

2. $$\left[xy\left(1-\frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]^2:\left[y^2\left(1-\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]^2$$

$$=\left(xy\cdot\frac{x+y-x+y}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}\right)^2:\left(y^2\cdot\frac{x-y-x-y}{x-y}\cdot\frac{y-x}{xy}\right)^2= \qquad C.E.:\begin{cases}x\neq\pm y\\x\neq 0\\y\neq 0\end{cases}$$

$$=\left(xy\cdot\frac{2y}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}\right)^2:\left(y^2\cdot\frac{-2y}{x-y}\cdot\frac{-(x-y)}{xy}\right)^2=(2y)^2:\left(\frac{2y^2}{x}\right)^2=\left(\frac{2xy}{2y^2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{x^2}{y^2}}$$

3. $$\frac{a-1}{a+1}+\frac{2a-a^2-1}{1+2a+a^2}+\frac{3+3a+a^2+a^3}{a^3+1+3a^2+3a}$$

$$=\frac{a-1}{a+1}+\frac{2a-a^2-1}{(1+a)^2}+\frac{3(1+a)+a^2(1+a)}{(a+1)^3}= \qquad C.E.: a\neq -1$$

$$=\frac{a-1}{a+1}+\frac{2a-a^2-1}{(1+a)^2}+\frac{(a+1)(3+a^2)}{(a+1)^3}=\frac{a-1}{a+1}+\frac{2a-a^2-1}{(1+a)^2}+\frac{3+a^2}{(a+1)^2}=$$

$$=\frac{a-1}{a+1}+\frac{2a-a^2-1+3+a^2}{(a+1)^2}=\frac{a-1}{a+1}+\frac{2(a+1)}{(a+1)^2}=\frac{a-1}{a+1}+\frac{2}{a+1}=\frac{a-1+2}{a+1}=\frac{a+1}{a+1}=\mathbf{1}$$

4. $$\left(\frac{a+2b}{2a-4b}+\frac{2b-a}{4b+2a}+\frac{8b^2}{a^2-4b^2}\right):\frac{8b}{a-2b}$$

$$=\left(\frac{a+2b}{2(a-2b)}+\frac{2b-a}{2(a+2b)}+\frac{8b^2}{(a-2b)(a+2b)}\right):\frac{8b}{a-2b}= \qquad C.E.:\begin{cases}a\neq\pm 2b\\b\neq 0\end{cases}$$

$$=\frac{(a+2b)^2+(2b-a)(a-2b)+16b^2}{2(a-2b)(a+2b)}\cdot\frac{a-2b}{8b}=$$

$$=\frac{a^2+4ab+4b^2-a^2+4ab-4b^2+16b^2}{16b(a+2b)}=\frac{8ab+16b^2}{16b(a+2b)}=\frac{8b(a+2b)}{16b(a+2b)}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

5. Considera le due frazioni algebriche $\frac{k+1}{k}$ e $\frac{1-k}{k^2-1}$.
   A. Per quali valori di k esse perdono significato?
   B. Determina il valore di $k \in \mathbb{Q}$ tale che il prodotto delle due frazioni sia uguale a 4.
   C. Esiste un valore di k per il quale il prodotto delle due frazioni è uguale a 1?

A. Per la prima frazione: $\boldsymbol{k = 0}$, per la seconda: $k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)(k+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = \pm 1}$

B. Calcolo innanzi tutto il prodotto tra le due frazioni:

$$\frac{k+1}{k} \cdot \frac{-(k-1)}{(k-1)(k+1)} = -\frac{1}{k} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = -\frac{1}{4}}$$

C. Pongo il prodotto uguale a 1: $-\frac{1}{k} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -1$. Questo risultato non è accettabile, visto che è stato escluso nel primo punto, perciò: **NO!** Non esiste un valore di k per il quale il prodotto delle due frazioni è uguale a 1.

6. Aiutandoti con le astuzie del calcolo letterale, confronta le quantità $\frac{1}{315} + \frac{1}{317}$ e $\frac{2}{316}$, stabilendo se è maggiore la somma delle prime due frazioni o la singola frazione.

Uso i prodotti notevoli per esprimere i due denominatori della prima quantità in funzione del terzo denominatore:

$$\frac{1}{316-1} + \frac{1}{316+1} = \frac{316+1+316-1}{(316-1)(316+1)} = \frac{2 \cdot 316}{(316-1)(316+1)}$$

Metto a confronto le due frazioni, a questo punto, facendo il prodotto incrociato:

$$\frac{2 \cdot 316}{(316-1)(316+1)} \dots \frac{2}{316} \qquad\qquad 2 \cdot 316^2 \dots 2(316-1)(316+1)$$

Dividendo entrambe le quantità per 2, ottengo:

$$316^2 \dots (316-1)(316+1) \qquad\qquad 316^2 \dots 316^2 - 1$$

In cui si nota che la prima quantità è maggiore della seconda, perciò:

$$\boldsymbol{\frac{1}{315} + \frac{1}{317} > \frac{2}{316}}$$