1. $$\left(\frac{2xy}{x^2+y^2+2xy}-1\right)\cdot\left[\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)+1\right]^{-1}$$

$$=\frac{2xy-x^2-y^2-2xy}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}:\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}+1\right)^{-1}=$$

$$C.E.:\begin{cases}x\neq\pm y\\ x\neq 0\\ y\neq 0\end{cases}$$

$$=-\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{(x-y)^2}{xy}\cdot\frac{xy}{(x+y)^2}+1\right)^{-1}=-\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}+1\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2}\right)^{-1}=-\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)^2}\right)^{-1}=-\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{2(x^2+y^2)}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

2. $$\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a^2+b^2+2ab}{2ab}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=$$

$$C.E.:\begin{cases}a\neq\pm b\\ a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2ab}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{a+b}{2(a^2+b^2)(a-b)}\cdot(2a^2+2b^2)=\frac{a+b}{2(a^2+b^2)(a-b)}\cdot 2(a^2+b^2)=\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{a-b}}$$

3. $$\left(\frac{a+1}{a-2}+\frac{3a-5}{a+3}-\frac{3a^2+7}{a^2+a-6}\right)\cdot\frac{a^2+4a+3}{a^2-7a+6}$$

$$=\left(\frac{a+1}{a-2}+\frac{3a-5}{a+3}-\frac{3a^2+7}{(a+3)(a-2)}\right)\cdot\frac{(a+3)(a+1)}{(a-6)(a-1)}=$$

$$C.E.:\begin{cases}a\neq 2\\ a\neq 6\\ a\neq -3\\ a\neq 1\end{cases}$$

$$=\frac{(a+1)(a+3)+(3a-5)(a-2)-(3a^2+7)}{(a-2)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)(a+1)}{(a-6)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+4a+3+3a^2-11a+10-3a^2-7}{(a-2)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)(a+1)}{(a-6)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2-7a+6}{(a-2)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)(a+1)}{(a-6)(a-1)}=\frac{(a-6)(a-1)}{(a-2)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)(a+1)}{(a-6)(a-1)}=\frac{\boldsymbol{a+1}}{\boldsymbol{a-2}}$$

4. $$2a\left(\frac{a+b}{2b}+\frac{b}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{ab-b^2}:\left(a-b+\frac{b}{a+b}\right)$$

$$=2a\frac{(a+b)(a-b)+2b^2}{2b(a-b)}\cdot\frac{b(a-b)}{a^2+b^2}:\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}=$$

$$C.E.:\begin{cases}a\neq\pm b\\ a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$$

$$=2a\cdot\frac{a^2-b^2+2b^2}{2b(a-b)}\cdot\frac{b(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{a+b}{a^2-b^2+b^2}=$$

$$=2a\cdot\frac{a^2+b^2}{2b(a-b)}\cdot\frac{b(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{a+b}{a^2}=\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{a}}$$

5. Rispondi ai seguenti quesiti:
   A. Dopo aver semplificato l'espressione $1-\frac{1}{1+\frac{1}{A}}$, stabilisci per quali valori di A perde di significato.
   B. Determina il valore che assume l'espressione per $A=b-1$.
   C. Per $A=b-1$, quale valore devi attribuire a $b\in\mathbb{R}$ affinché l'espressione valga $\frac{1}{2}$?

A. Innanzi tutto, procedo con il semplificare l'espressione data:

$$1-\frac{1}{\frac{A+1}{A}}=1-\frac{A}{A+1}=\frac{A+1-A}{A+1}=\frac{1}{A+1}$$

L'espressione perde significato quando i due denominatori che sono comparsi nello svolgimento sono uguali a zero, ovvero:

$$\boldsymbol{A=0} \quad \vee \quad \boldsymbol{A=-1}$$

B. Sostituisco l'espressione $b-1$ ad A:

$$\frac{1}{b-1+1}=\boldsymbol{\frac{1}{b}}$$

C. Pongo l'espressione uguale al valore dato e ottengo il valore del parametro richiesto:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b=\mathbf{2}$$

6. Considera i polinomi:

$$P(x)=x^2-4x \qquad Q(x)=x-5$$

Calcola:

$$\frac{P(a)+Q(9)}{P(b-2)}\cdot\frac{Q(b-1)}{[Q(a+3)]^2}$$

e determina le condizioni di esistenza.

Per eseguire il calcolo devo sostituire alla x i parametri o i numeri indicati nel testo, ricordando che $x^2-4x=x(x-4)$:

$$\frac{a^2-4a+9-5}{(b-2)(b-2-4)}\cdot\frac{b-1-5}{\left((a+3)-5\right)^2}=\frac{a^2-4a+4}{(b-2)(b-6)}\cdot\frac{b-6}{(a-2)^2}=\frac{a-2}{b-2}\cdot\frac{1}{(a-2)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{b-2}}$$

$$C.E.: b\neq 2 \quad \wedge \quad b\neq 6 \quad \wedge \quad a\neq 2$$