Calcola il valore delle seguenti espressioni e scrivi il risultato in forma algebrica:

1. $\frac{(1-i)^4+(1-i)^3}{3+i}$

$$=\frac{((1-i)^2)^2+1-3i-3+i}{3+i}=\frac{(1-1-2i)^2-2-2i}{3+i}=\frac{-4-2-2i}{3+i}=\frac{-2(3+i)}{3+i}=\mathbf{-2}$$

2. $\left[\frac{\cos\frac{13}{5}\pi+i\sin\frac{13}{5}\pi}{\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^2}\right]^2 : \left(\cos\frac{59}{10}\pi+i\sin\frac{59}{10}\pi\right)$

$$=\left(\frac{\cos\frac{13}{5}\pi+i\sin\frac{13}{5}\pi}{\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi}\right)^2 : \left(\cos\frac{59}{10}\pi+i\sin\frac{59}{10}\pi\right)=\left(\cos\frac{11}{5}\pi+i\sin\frac{11}{5}\pi\right)^2 : \left(\cos\frac{59}{10}\pi+i\sin\frac{59}{10}\pi\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{22}{5}\pi+i\sin\frac{22}{5}\pi\right):\left(\cos\frac{59}{10}\pi+i\sin\frac{59}{10}\pi\right)=\cos\left(-\frac{15}{10}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{15}{10}\pi\right)=\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\boldsymbol{i}$$

Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

3. $x^6+2x^3+1=0$

$$(x^3+1)^2=0 \qquad x^3+1=0$$

$$x^2=-1 \qquad x=\sqrt[3]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right)$$

$$\boldsymbol{x_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \boldsymbol{x_2=-1} \quad \boldsymbol{x_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Le soluzioni hanno tutte molteplicità 2.

4. $x^2+x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

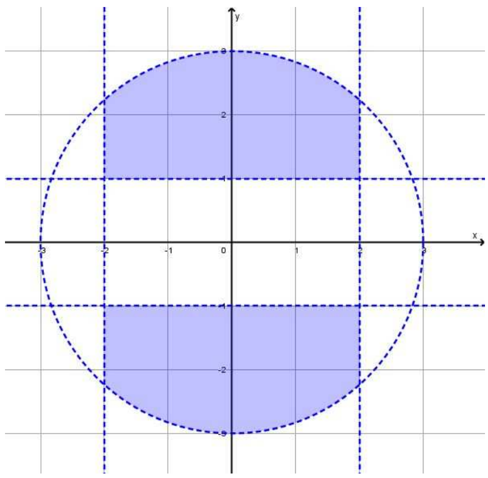
5. Rappresenta nel piano di Gauss i punti corrispondenti ai numeri complessi che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases}|z|<3\\ |\,Re\,(z)|<2\\ |\,Im\,(z)|>1\end{cases}$$

Dato il numero complesso $z=x+iy$, il sistema può diventare:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}<3\\ |x|<2\\ |y|>1\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+y^2<9\\ -2<x<2\\ y<-1 \ \vee \ y>1\end{cases}$$

La rappresentazione del sistema è quella a lato.



6. Determina il valore di k per il quale i due numeri complessi $3+2^{k-1}\,i$ e $3-4^{2k-1}\,i$ sono coniugati.

I coefficienti dell'unità immaginaria devono essere opposti:

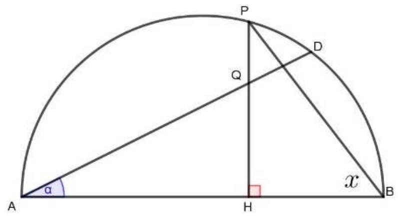
$$2^{k-1}=4^{2k-1} \qquad 2^{k-1}=2^{4k-2} \qquad k-1=4k-2 \qquad \boldsymbol{k=\frac{1}{3}}$$

7. **<u>Svolgi uno dei seguenti problemi a tua scelta:</u>**

Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia AD una corda che forma con AB un angolo α tale che $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Detto P un punto dell'arco AD, condurre per esso la perpendicolare al diametro che incontri in Q la corda AD e in H il diametro AB in modo che risulti: $\overline{QH} + \overline{PH} = kr \qquad (k \in \mathbb{R}^+)$.

Rappresento la semicirconferenza:

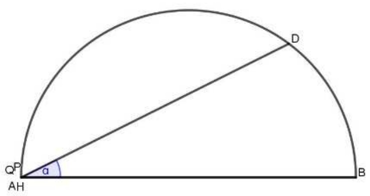
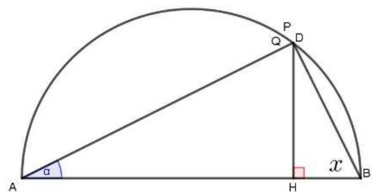
$$\overline{AB} = 2r \qquad B\hat{A}D = \alpha = arc\tan\frac{1}{2}$$



Prima di procedere, determino le altre funzioni goniometriche dell'angolo α:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Pongo: $H\hat{B}P = x$ e valuto i casi limite:

$x = 0$ $\overline{QH} = \overline{PH} = 0$ $k = 0$ 	$x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\overline{QH} = \overline{PH} = \overline{AD}\sin\alpha =$ $= 2r\cos\alpha\sin\alpha = \frac{8}{5}r$ $k = \frac{8}{5}$ 

Perciò: $\mathbf{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \alpha}$

Determino l'equazione generica. Per determinare $\overline{PH}$, applico il primo teorema dei triangoli rettangoli, ma per determinare $\overline{PB}$, che è l'ipotenusa, devo applicare il teorema della corda, sapendo che l'angolo sotteso è il complementare di x:

$$\overline{PH} = \overline{PB}\sin x = 2r\cos x\sin x$$

Per determinare $\overline{QH}$, devo determinare innanzi tutto il cateto $\overline{HB}$, per differenza determino $\overline{AH}$ e considero il triangolo rettangolo AHQ; ora posso determinare il cateto $\overline{QH}$, applicando il secondo teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{HB} = \overline{PB}\cos x = 2r\cos^2 x \qquad \overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB} = 2r - 2r\cos^2 x = 2r\,(1-\cos^2 x) = 2r\sin^2 x$$

$$\overline{QH} = \overline{AH}\tan\alpha = \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}\,2r\sin^2 x = r\sin^2 x$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per costruire il sistema parametrico, a partire dalla sua equazione:

$$r\sin^2 x + 2r\cos x\sin x = kr \qquad \sin^2 x + 2\cos x\sin x = k \qquad \frac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x = k \qquad 2\sin 2x - \cos 2x = 2k - 1$$

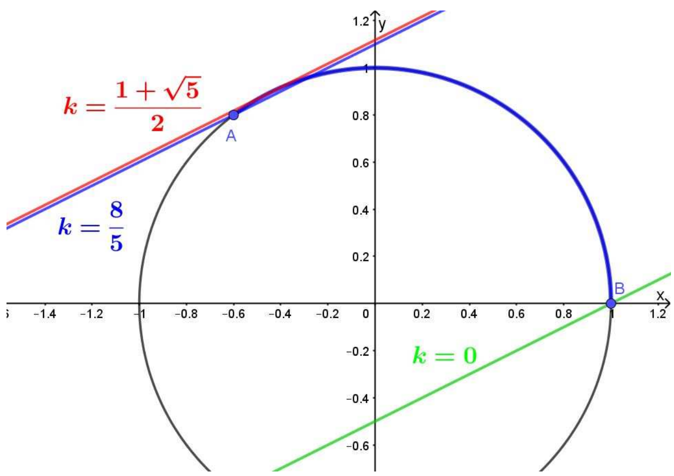
Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 2\sin 2x - \cos 2x = 2k - 1 \\ 0 \leq 2x \leq 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} 2Y - X = 2k - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -\frac{3}{5} \leq X \leq 1;\ \ 0 \leq Y \leq 1 \end{cases}$$

Il fascio è improprio.



Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$$A(\cos(\pi-2\alpha)\,;\sin(\pi-2\alpha))=\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right):\ \frac{8}{5}+\frac{3}{5}=2k-1\quad\Rightarrow\quad k=\frac{8}{5}\qquad\qquad \textit{due soluzioni}$$

$$B(1;0):\quad -1=2k-1\quad\Rightarrow\quad k=0\qquad\qquad \textit{una soluzione}$$

Tangente: $\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+4}}=1\qquad k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e prendo il valore positivo

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{una\ soluzione\ per}\quad \mathbf{0\le k<\frac{8}{5}}\qquad\qquad \boldsymbol{due\ soluzioni\ per}\ \mathbf{\frac{8}{5}\le k\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

È dato il triangolo ABC la cui base AB misura $2a$ e i cui angoli alla base $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$ hanno tangenti uguali rispettivamente a 2 e a $\frac{1}{2}$.

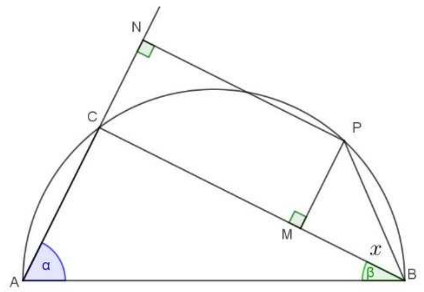
A. Posti $B\hat{A}C=\alpha$ e $A\hat{B}C=\beta$, calcolare le funzioni goniometriche di α e β e verificare che il triangolo ABC è rettangolo in C.
B. Circoscritto al triangolo il semicerchio di diametro AB, determinare sull'arco BC un punto P in modo che risulti:

$$\overline{PM}+\overline{PN}=k\,\overline{BC}\qquad (k\in\mathbb{R}^+)$$

essendo M ed N le proiezioni di P rispettivamente sulla corda BC e sul prolungamento della corda AC.

Siccome le due tangenti sono una la reciproca dell'altra, i due angoli α e β sono complementari, perciò il triangolo è rettangolo in C. Determino le funzioni goniometriche dei due angoli:

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=2\frac{\sqrt{5}}{5}\qquad\qquad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$



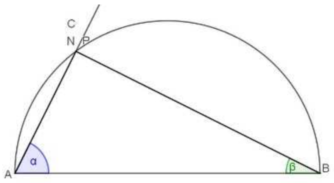
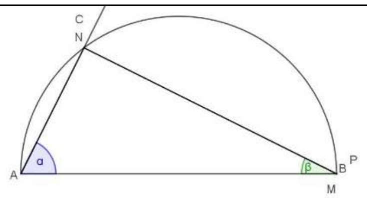
E visto che l'angolo β è complementare di α:

$$\sin\beta=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\qquad\qquad \cos\beta=\sin\alpha=2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Rappresento la semicirconferenza che, trattandosi di un triangolo rettangolo, ha il diametro coincidente con l'ipotenusa del triangolo ed è circoscritta allo stesso.

$$\overline{AB}=2a$$

Pongo: $M\hat{B}P=x$ e valuto i casi limite:

$\boldsymbol{x=0}$ $0+0=k\,\overline{BC}$ $k=0$		$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}-\beta}$ $0+\overline{BC}=k\,\overline{BC}$ $k=1$	

Perciò: $\mathbf{0\le x\le\frac{\pi}{2}-\beta}$

Determiniamo l'equazione generica, applicando il primo teorema dei triangoli rettangoli per determinare $\overline{PM}$, cateto del triangolo rettangolo PMB e il teorema della corda per determinare $\overline{PB}$, corda che sottende un angolo $\alpha-x$, visto che l'arco PC sottende l'angolo x e quindi l'arco PB sottende l'angolo $\alpha-x$:

$$\overline{PM}=\overline{PB}\sin x=2a\sin x\sin\ (\alpha-x)=2a\sin x\ (\sin\alpha\cos x-\cos\alpha\sin x)=2a\frac{\sqrt{5}}{5}\ (2\cos x\sin x-\sin^2 x)$$

$\overline{PN}=\overline{CM}$ dato che CMPN è un rettangolo. Possiamo quindi determinare $\overline{PN}$ per differenza:

$$\overline{PN}=\overline{CM}=\overline{CB}-\overline{MB}=2a\sin\alpha-\overline{PB}\cos x=4a\frac{\sqrt{5}}{5}-2a\frac{\sqrt{5}}{5}\ (2\cos^2 x-\sin x\cos x)=2a\ \frac{\sqrt{5}}{5}\ (2\sin^2 x+\sin x\cos x)$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per costruire il sistema parametrico, a partire dalla sua equazione:

$$2a\frac{\sqrt{5}}{5}\,(2\cos x\sin x-\sin^2 x)+2a\,\frac{\sqrt{5}}{5}\,(2\sin^2 x+\sin x\cos x)=k\;2a\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$3\cos x\sin x+\sin^2 x=2k \qquad \frac{3}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=2k \qquad 3\sin 2x-\cos 2x=4k-1$$

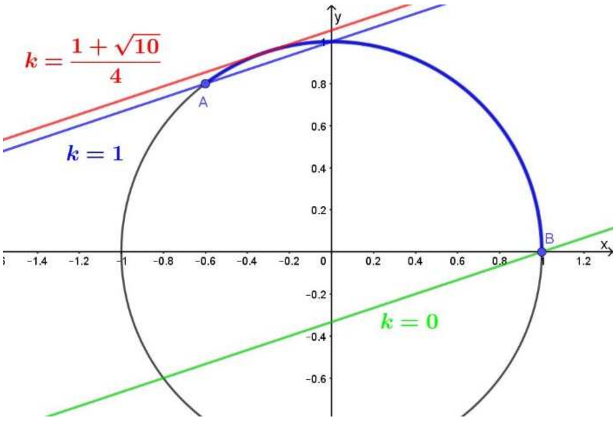
Perciò il sistema è:

$$\begin{cases} 3\sin 2x-\cos 2x=4k-1 \\ 0\le 2x\le 2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} 3Y-X=4k-1 \\ X^2+Y^2=1 \\ -\frac{3}{5}\le X\le 1;\;\; 0\le Y\le 1 \end{cases}$$

Il fascio è improprio.



Impongo il passaggio del fascio per i due punti limite A e B:

$$A(\cos(\pi-2\beta)\,;\sin(\pi-2\beta))=\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right):\;\; \frac{12}{5}+\frac{3}{5}=4k-1 \quad\Longrightarrow\quad k=1 \qquad\qquad \textit{due soluzioni}$$

$$B(1;0):\;\; -1=4k-1 \quad\Longrightarrow\quad k=0 \qquad\qquad \textit{una soluzione}$$

Tangente: $\frac{|4k-1|}{\sqrt{1+9}}=1$ $\quad k=\frac{1+\sqrt{10}}{4}$ e prendo il valore positivo

Concludendo quindi:

$$\boldsymbol{una\ soluzione\ per\ \ 0\le k<1} \qquad\qquad \boldsymbol{due\ soluzioni\ per\ \ 1\le k\le\frac{1+\sqrt{10}}{4}}$$