1. Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di modulo v_o. Nel punto di massima altezza la sua velocità è $\frac{1}{2}v_o$. Qual è stato l'angolo di lancio del proiettile?

$$v_o \qquad v_1 = \frac{1}{2}v_o \qquad \alpha?$$

Nel punto più alto della sua traiettoria, il proiettile ha una componente verticale nulla della velocità, mentre la componente orizzontale della velocità è uguale a quella iniziale, visto che in orizzontale il proiettile si muove di moto uniforme. Perciò:

$$\begin{cases} v_{o_x} = \frac{1}{2}v_o \\ v_{o_x} = v_o\cos\alpha \end{cases} \qquad \frac{1}{2}v_o = v_o\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2} \qquad \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \mathbf{60°}$$

2. Un arciere tira una freccia orizzontalmente verso un bersaglio lontano 15 m. L'arciere scocca la freccia esattamente in direzione del centro del bersaglio, ma lo colpisce 52 cm più in basso. Qual era il modulo della velocità iniziale della freccia?

$$\Delta y = -52\ cm \qquad G = 15\ m \qquad v_o?$$

Considero innanzi tutto la componente verticale del moto, che è data da un moto uniformemente accelerato. Sapendo che la freccia è stata tirata orizzontalmente, la componente verticale della velocità iniziale è nulla e l'accelerazione è pari a quella di gravità. La legge oraria diventa:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 \\ y = \Delta y \end{cases} \qquad \Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad t = \sqrt{-\frac{2\Delta y}{g}}$$

La gittata è la distanza totale percorsa in orizzontale in un moto uniforme, ovvero la distanza percorsa in un tempo pari al tempo di volo, partendo con una velocità orizzontale che è pari alla velocità iniziale, dato che la freccia è stata tirata orizzontalmente:

$$G = v_o t \qquad \Rightarrow \qquad v_o = \frac{G}{t} = \frac{G}{\sqrt{-\frac{2\Delta y}{g}}} = G\sqrt{-\frac{g}{2\Delta y}} = \mathbf{46\ m/s}$$

3. Un giocatore di golf colpisce una pallina con velocità iniziale di 30,0 m/s e un angolo di 50,0° sopra l'orizzontale. La pallina atterra su un prato che è 5,00 m al di sopra del livello di quello dove era stata battuta.
   A. Per quanto tempo resta in aria la pallina?
   B. Quale distanza ha percorso la pallina in direzione orizzontale quando atterra?
   C. Quali sono il modulo e la direzione della velocità della pallina un istante prima dell'atterraggio?

$$v_o = 30{,}0\ m/s \qquad \alpha = 50{,}0° \qquad h = 5{,}00\ m \qquad t_v? \qquad G? \qquad v? \qquad \vartheta?$$

A. Considero solo la componente verticale del moto, data da un moto uniformemente accelerato. La legge oraria è: $y = v_{o_y}t - \frac{1}{2}gt^2$. Nella legge oraria, pongo l'altezza pari a h, altezza finale raggiunta, e ricavo il tempo di volo risolvendo l'equazione di secondo grado così ottenuta. Essa fornirà due soluzioni: quella minore sarà da scartare, perché ci dice in quale istante la pallina raggiunge l'altezza h nel suo moto di salita, ovvero la prima volta:

$$h = v_{o_y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad gt^2 - 2v_{o_y}t + 2h = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{v_{o_y} \pm \sqrt{v_{o_y}^2 - 2gh}}{g} \begin{cases} t_1 = [0{,}229\ s] \\ t_2 = \mathbf{4,46\ s} \end{cases}$$

B. Per determinare la distanza percorsa in orizzontale, moltiplico il tempo di volo per la componente orizzontale della velocità iniziale, che si mantiene uguale per tutto il volo, visto che lungo l'asse x il moto è rettilineo uniforme:

$$G = v_{o_x}t_2 = v_o t_2\cos\alpha = \mathbf{85,9\ m}$$

C. Lungo l'asse x la velocità è rimasta la stessa che alla partenza, mentre per la componente verticale della velocità, applico la legge oraria della velocità: $v_y = v_{o_y} - gt$, sostituendo il tempo di volo. Applicando il teorema di Pitagora, ottengo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{o_x}^2 + \left(v_{o_y} - gt_2\right)^2} = 28{,}3\ m/s$$

La direzione, ovvero l'angolo formato con la direzione orizzontale, è:

$$v_y = v_x\tan\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \mathbf{-47,2°}$$

4. Una giostra ruota con una velocità angolare costante ω. Roberta si trova a distanza r dal centro della giostra e si muove con velocità istantanea di modulo v. La velocità angolare della giostra viene poi diminuita del 20%. Come deve variare la sua posizione, se vuole mantenere la stessa velocità di rotazione? (esprimi il risultato in percentuale)

$$\omega_1, r_1, v \qquad \omega_2, r_2, v \qquad \omega_2 = 80\%\omega_1 \qquad r_2(r_1)?$$

Sapendo che i moduli delle due velocità tangenziali sono uguali e che la velocità tangenziale è $v = \omega r$, abbiamo:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \qquad \Rightarrow \qquad r_2 = r_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = r_1 \frac{\omega_1}{\frac{80}{100}\omega_1} = \frac{100}{80} r_1 = 1{,}25\, r_1$$

La distanza dal centro aumenta del $\mathbf{25\%}$.

5. Un aereo, che sta volando orizzontalmente alla velocità di $720\ km/h$, inizia un giro della morte mantenendo costante la velocità. L'accelerazione centripeta di cui risente il pilota è 4,00 volte quella di gravità.
   A. Qual è il raggio della traiettoria descritta dall'aereo?
   B. Quanto tempo impiega il pilota a completare il giro?
   C. Raddoppiando la velocità, ma mantenendo costante l'accelerazione, come cambia il periodo?

$$v = 720\ km/h = 200\ m/s \qquad a_c = 4{,}00\ g \qquad r? \qquad T? \qquad v_2 = v \qquad T_2(T)?$$

A. La relazione tra accelerazione centripeta e velocità tangenziale permette di determinare agevolmente il raggio della traiettoria:

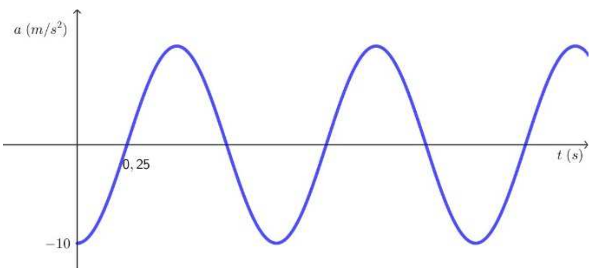
$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{v^2}{a_c} = \mathbf{1{,}02 \cdot 10^3\ m}$$

B. Dalla definizione di velocità, posso determinare il periodo, ovvero il tempo impiegato a completare un giro:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \frac{v^2}{a_c}}{v} = \frac{2\pi v}{a_c} = \mathbf{32{,}0\ s}$$

C. Dalla relazione precedente, posso vedere che il periodo è direttamente proporzionale alla velocità, perciò raddoppiando la velocità anche il periodo **raddoppia**.

6. Nella figura è mostrata l'accelerazione in funzione del tempo nel moto armonico di una molla.
   A. Determina il periodo, la frequenza e l'ampiezza del moto.
   B. Determina il modulo della velocità massima.
   C. Rappresenta il grafico spazio-tempo e il grafico velocità-tempo di questo moto armonico.



Dal grafico posso ricavare alcuni dati:

$$a_{max} = 10\ m/s^2 \qquad \frac{T}{4} = 0{,}25\ s$$

A. Il periodo è $T = \mathbf{1{,}0\ s}$, la frequenza è $f = \frac{1}{T} = \mathbf{1{,}0\ Hz}$.
Per determinare l'ampiezza:

$$a_{max} = A\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{a_{max}}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \mathbf{0{,}25\ m}$$

B. $v_{max} = A\omega = \mathbf{1{,}6\ m/s}$

C.