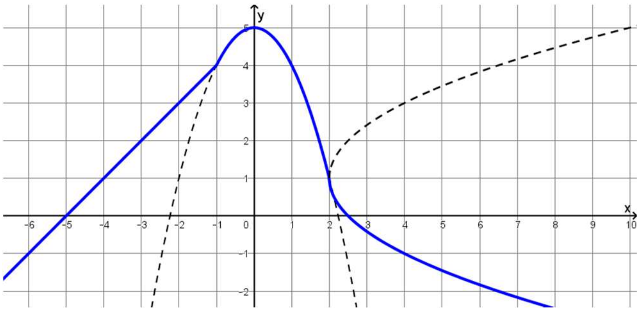
1. Trova l'equazione del grafico sottostante, utilizzando i dati della figura 1.

La prima parte del grafico è una retta, parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante (quindi con coefficiente angolare 1), che interseca l'asse x nel punto di ascissa -5:



$$y = x + q \qquad 0 = -5 + q$$
$$\boldsymbol{y = x + 5 \qquad se\ x \leq -1}$$

La seconda parte del grafico è una parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y (perciò $b = 0$) e con vertice nel punto $(0; 5)$ (perciò $c = 5$). L'equazione generica della parabola è perciò:

$$y = ax^2 + 5$$

Impongo il passaggio della parabola per il punto $(2; 1)$, ovvero sostituisco le coordinate del punto nell'equazione generica della parabola:

$$1 = 4a + 5 \qquad 4a = -4 \qquad a = -1$$

Perciò: $\boldsymbol{y = -x^2 + 5 \qquad se -1 < x \leq 2}$

La terza parte del grafico è un parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice in $(2; 1)$ e passante per il punto $(4; -1)$. Perciò, pongo l'ordinata del vertice data uguale a quella generica, poi impongo il passaggio della parabola $x = ay^2 + by + c$ per il vertice e per il punto dato, sostituendo le coordinate nell'equazione generica:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 2 = a + b + c \\ 4 = a - b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ -a + c = 2 \\ 3a + c = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a = 2 \\ b = -2a \\ c = a + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{5}{2} \qquad 2x = y^2 - 2y + 5 \qquad y^2 - 2y + 1 = 2x - 4 \qquad (y-1)^2 = 2x - 4$$

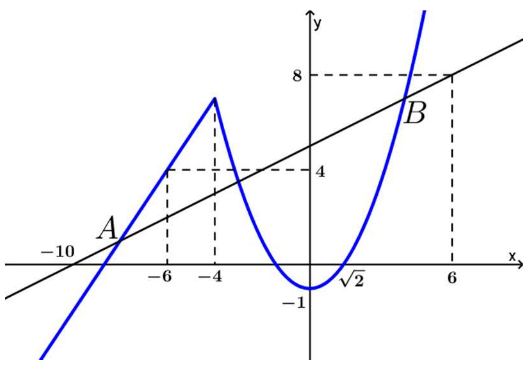
$$\boldsymbol{y = 1 - \sqrt{2x - 4} \qquad se\ x > 2}$$

Riassumendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} x + 5 & se\ x \leq -1 \\ -x^2 + 5 & se -1 < x \leq 2 \\ 1 - \sqrt{2x - 4} & se\ x > 2 \end{cases}}$$

2. Trova la lunghezza del segmento AB in figura 2.

Trovo l'equazione della parabola, sapendo che ha asse di simmetria coincidente con l'asse y (perciò $b = 0$) e vertice nel punto dell'asse di ordinata -1 (perciò $c = -1$).
L'equazione generica della parabola è: $y = ax^2 - 1$.
Impongo il passaggio della parabola per il punto $(\sqrt{2}; 0)$, ovvero sostituisco le coordinate del punto nell'equazione generica della parabola:



$$0 = 2a - 1 \qquad a = \frac{1}{2}$$

Perciò: $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Sostituisco l'ascissa -4 nella parabola, per ottenere il secondo punto della retta: $y = \frac{1}{2}(-4)^2 - 1 = 7$.

Determino la retta passante per i punti $(-4; 7)$ e $(-6; 4)$, che ricavo dal grafico:

$$\frac{x + 6}{-4 + 6} = \frac{y - 4}{7 - 4} \qquad 3x + 18 = 2y - 8 \qquad y = \frac{3}{2}x + 13$$

Determino ora la retta (in nero nel grafico), sapendo che passa per i punti $(-10; 0)$ e $(6; 8)$:

$$\frac{x + 10}{6 + 10} = \frac{y - 0}{8 - 0} \qquad x + 10 = 2y \qquad y = \frac{1}{2}x + 5$$

Determino le coordinate di A intersecando le due rette e le coordinate di B intersecando la parabola con la seconda retta (otterrò due risultati e devo considerare solo quello con ascissa positiva, come si può vedere dal grafico):

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 13 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{2}x + 13 = \frac{1}{2}x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -8 \\ y = 1 \end{cases} \qquad A\,(-8; 1)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{1}{2}x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \qquad x^2 - x - 12 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ [-3] \end{matrix} \right. \qquad B\,(4; 7)$$

Ora posso calcolare la lunghezza del segmento AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \mathbf{6\sqrt{5}}$$

3. Studia il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 - 2x\,(3k - 1) + 9k - 4$.
   A. Tra le parabole del fascio individua quella tangente all'asse delle ascisse e indica con A il suo punto di intersezione con l'asse delle ordinate.
   B. Nell'arco di parabola di estremi A e B, dove B è il punto base del fascio dato, individua i punti che formano con AB un triangolo di area $\frac{3}{2}$.

Determino innanzi tutto le generatrici:

$$k(x^2 - 6x + 9) - y + 2x - 4 = 0$$

- $(x - 3)^2 = 0$ parabola degenere, che ci dice che si tratta di un fascio di parabole tangenti nel punto di ascissa 3
- $y = 2x - 4$ parabola degenere, ovvero retta tangente alle parabole

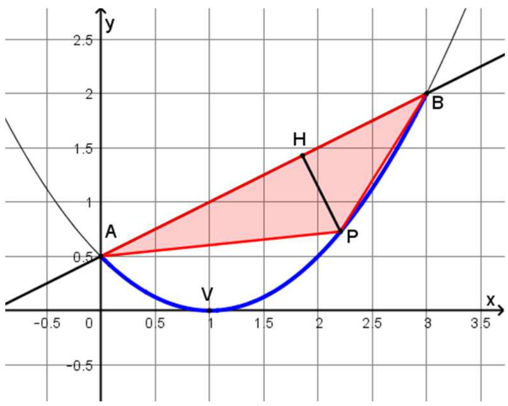
Si tratta quindi di un **fascio di parabole tangenti alla retta $y = 2x - 4$ nel punto $(3; 2)$**, che è il punto base del fascio.

A. La parabola del fascio tangente all'asse delle ascisse ha il vertice sull'asse delle ascisse, ovvero ha l'ordinata del vertice nulla, perciò:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \qquad (3k - 1)^2 - k\,(9k - 4) = 0 \qquad 9k^2 - 6k + 1 - 9k^2 + 4k = 0 \qquad k = \frac{1}{2}$$

La parabola ha equazione: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}}$ e ha intersezione con l'asse y di coordinate: $\boldsymbol{A\,\left(0; \frac{1}{2}\right)}$.

B. Considero il generico punto $P\,\left(x; \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$, tale per cui $0 \le x \le 3$.



Determino innanzi tutto la lunghezza del lato AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Determino l'equazione della retta r passante per i punti A e B:

$$\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} \qquad x = 2y - 1 \qquad x - 2y + 1 = 0$$

Posso determinare la lunghezza dell'altezza $\overline{PH}$ del triangolo come distanza del punto P dalla retta r:

$$\overline{PH} = d\,(P; r) = \frac{|x - x^2 + 2x - 1 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|x^2 - 3x|}{\sqrt{5}}$$

Calcolo la generica area del triangolo e la pongo uguale a $\frac{3}{2}$:

$$\frac{|x^2 - 3x|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad |x^2 - 3x| = 2 \qquad x^2 - 3x \pm 2 = 0$$

Ricordo che $0 \le x \le 3$: $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ entrambe accettabili; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ non accettabili. Perciò i punti P da determinare sono due, uno coincidente con il vertice della parabola $\boldsymbol{V(1; 0)}$ e l'altro $\boldsymbol{P\left(2; \frac{1}{2}\right)}$.

4. Sia dato il fascio di parabole di punti base $A\ (1;0)$ e $B\ (3;4)$. Scrivi l'equazione del fascio e determina il valore del parametro k per il quale la parabola:
   A. passa per l'origine;
   B. ha vertice di ascissa $\frac{1}{4}$;
   C. è tangente alla retta di equazione $y = x - 4$.

Determino innanzi tutto l'equazione della retta passante per i punti A e B, in modo da poter scrivere l'equazione del fascio:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{4-0} \qquad y = 2x - 2$$

L'equazione del fascio è: $y = 2x - 2 + k\ (x-1)(x-3)$ $\quad$ $\boldsymbol{y = kx^2 + 2x\ (1-2k) - 2 + 3k}$

A. Perché la parabola passi per l'origine, deve avere il termine noto uguale a zero: $3k - 2 = 0$ $\quad$ $\boldsymbol{k = \frac{2}{3}}$

B. Pongo la generica ascissa del vertice uguale a quella data: $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$ $\quad a = -2b \quad k = -4(1-2k)$ $\quad$ $\boldsymbol{k = \frac{4}{7}}$

C. Metto a sistema l'equazione del fascio di parabole con l'equazione della retta e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = kx^2 + 2x\ (1-2k) - 2 + 3k \\ y = x - 4 \end{cases} \qquad kx^2 + x\ (1-4k) + 2 + 3k \qquad \Delta = (1-4k)^2 - 4k\ (2+3k) = 0$$

$$1 - 8k + 16\,k^2 - 8k - 12\,k^2 = 0 \qquad 4k^2 - 16k + 1 = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{4} = \boldsymbol{\frac{4 \pm \sqrt{15}}{2}}$$

5. Scrivi le equazioni delle parabole (della forma $y = ax^2 + bx + 4$) tangenti all'asse delle ascisse e aventi, nel punto di ascissa 3, la tangente di coefficiente angolare 2.
   Determina l'equazione della retta parallela all'asse delle ascisse che formi con le tangenti alle parabole nel loro punto di ascissa nulla un triangolo di area 32.

Perché sia tangente all'asse delle ascisse, deve avere il vertice sull'asse delle ascisse, ovvero l'ordinata del vertice nulla, ovvero $\Delta = 0$: $b^2 - 16a = 0$. La tangente nel punto di ascissa 3 ha generica equazione, per la formula di sdoppiamento:

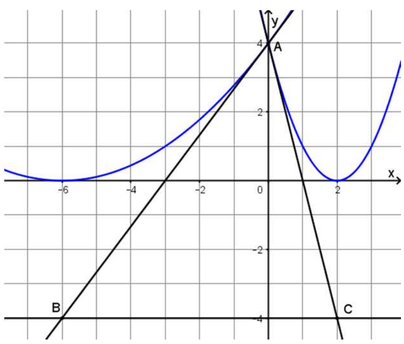
$$\frac{y + y_o}{2} = 3ax + b\frac{x+3}{2} + 4 \qquad y = 6ax + bx + 3b + 8 - y_o \qquad y = x\ (6a+b) + 3b + 8 - y_o$$

Pongo il coefficiente angolare della retta uguale a quello dato: $6a + b = 2$
Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} b = 2 - 6a \\ b^2 - 16a = 0 \end{cases} \qquad (2-6a)^2 - 16a = 0 \qquad 36a^2 - 40a + 4 = 0 \qquad 9a^2 - 10a + 1 = 0$$

Le due soluzioni sono: $a_1 = 1$ e $a_2 = \frac{1}{9}$. Perciò le due parabole hanno equazione: $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4$.

Il punto di intersezione con l'asse y è $A(0;4)$ e posso determinare le tangenti, usando la formula di sdoppiamento:



$$t_1: \frac{y+4}{2} = 0x - 4\frac{x}{2} + 4 \qquad y = -4x + 4$$
$$t_2: \frac{y+4}{2} = 0x + \frac{4}{3}\cdot\frac{x}{2} + 4 \qquad y = \frac{4}{3}x + 4$$

Considero la generica retta parallela all'asse x, di equazione $y = k$ e, intersecandola con le due tangenti, ottengo: $B\left(\frac{3k-12}{4}; k\right)$ e $C\left(\frac{4-k}{4}; k\right)$. Calcolo la distanza tra i due punti:

$$\overline{BC} = \left|\frac{3k-12}{4} - \frac{4-k}{4}\right| = |k-4|$$

Determino la distanza del punto A dalla generica retta parallela all'asse x, ovvero l'altezza del triangolo: $h = |4-k| = |k-4|$.
Impongo ora l'area del triangolo uguale a 32:

$$|k-4| \cdot |k-4| \cdot \frac{1}{2} = 32 \qquad (k-4)^2 = 64 \qquad k - 4 = \pm 8 \qquad k_1 = 12 \qquad k_2 = -4$$

Le rette richieste sono due: $\boldsymbol{y = 12}$ e $\boldsymbol{y = -4}$.