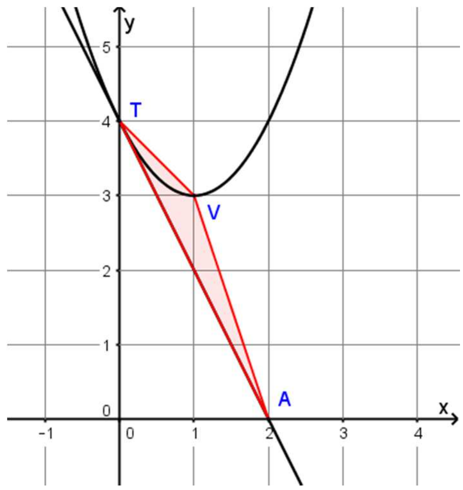
1. Trova la retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 4$ e parallela alla retta di equazione $y + 2x = 0$. Indicati con T il punto di tangenza, con V il vertice della parabola e con A il punto d'incontro della retta tangente con l'asse delle x, calcola l'area del triangolo AVT.

Considero il fascio di rette improprio di cui la retta data è la generatrice. Metto a sistema l'equazione del fascio con quella della parabola e pongo uguale a zero il delta della risolvente:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = -2x + q \end{cases} \qquad x^2 + 4 - q = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 - 4 + q = 0 \qquad q = 4 \qquad \boldsymbol{y = -2x + 4}$$



Determino le coordinate del punto di tangenza:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \qquad x^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{T\ (0, 4)}$$

Determino le coordinate del vertice della parabola:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1; 3)$$

Determino infine le coordinate del punto di intersezione della retta tangente con l'asse x:

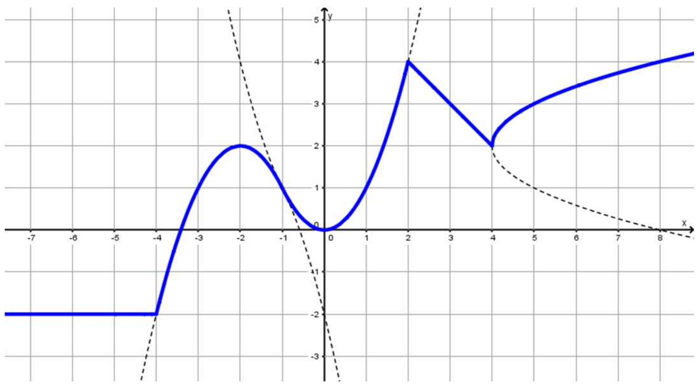
$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\ (2, 0)}$$

Per determinare l'area del triangolo, determino la lunghezza del lato AT e calcolo la distanza del vertice V dalla tangente. Conoscendo base e altezza, posso determinare l'area del triangolo:

$$\overline{AT} = \sqrt{(2-0)^2 - (0-4)^2} = 2\sqrt{5} \qquad h = d(V, AT) = \frac{|\,2 + 3 - 4\,|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Area = \frac{\overline{AT} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{1}$$

2. Determina l'equazione del seguente grafico:



Il primo tratto, per $x \leq -4$, è una retta parallela all'asse x di equazione $y = -2$; il secondo tratto, per $-4 < x \leq -1$, è una parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V_1\ (-2; 2)$ e passante per il punto $(-1; 1)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ 2 = 4a - 2b + c \\ 1 = a - b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ c = 4a + 2 \\ a - 4a + 4a + 2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -2 \end{cases}$$

Il terzo tratto, per $-1 < x \leq 2$, è la parabola con vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y e passante per il punto $(1; 1)$, perciò ha equazione: $y = x^2$.

Il quarto tratto, per $2 < x \leq 4$, è una retta parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante e ordinata all'origine 6, ovvero:

$$y = -x + 6$$

L'ultimo tratto, per $x > 4$, è una parabola con asse parallelo all'asse x, di vertice $V_2\ (4; 2)$ e che intercetta l'asse x nel punto $(8; 0)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4 = 4a + 2b + c \\ 8 = 0 + 0 + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4a \\ c = 8 \\ 4a - 8a + 8 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$x = y^2 - 4y + 8 \qquad (y-2)^2 = x - 4 \qquad y - 2 = \sqrt{x-4}$$

Concludendo:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} -2 & se\ x \leq -4 \\ -x^2 - 4x - 2 & se\ -4 < x \leq -1 \\ x^2 & se\ -1 < x \leq 2 \\ -x + 6 & se\ 2 < x \leq 4 \\ 2 + \sqrt{x-4} & se\ x > 4 \end{cases}}$$

3. Considera il fascio di parabole di equazione:

$$(k+1)\,y+(k-1)\,x^2+(1-3k)\,x+4-2k=0$$

e studia le sue principali caratteristiche.
Determina per quale valore del parametro k si ottiene la parabola del fascio:

A. con concavità rivolta verso l'alto;
B. passante per il punto $P(2;\ -2)$;
C. che intercetta sulla retta $y=-2$ un segmento di lunghezza 6;
D. tangente alla retta $y=-2$;
E. tangente alla retta $7x-3y+1=0$.

Considera la parabola che si ottiene per $k=0$. Sia C il punto della parabola di ascissa 2, sia F il fuoco della parabola e V il suo vertice: calcola l'area del triangolo AFV.

Determino le generatrici del fascio di parabole:

$$k\,(y+x^2-3x-2)+y-x^2+x+4=0$$

Determino le eventuali intersezioni delle due generatrici:

$$\begin{cases} y=-x^2+3x+2 \\ y=x^2-x-4 \end{cases} \qquad -x^2+3x+2=x^2-x-4 \qquad 2x^2-4x-6=0$$

$$x^2-2x-3=0 \qquad x_{1,2}=1\pm\sqrt{4}=\begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \qquad A\,(3;2) \quad B\,(-1;-2)$$

Si tratta di un fascio di parabole secanti nei punti A e B. determino le parabole degeneri:

$$k=-1: \qquad -2x^2+4x+6=0 \qquad x=3 \quad \vee \quad x=-1$$

$$k=1: \qquad y-x+1=0$$

A. Per determinare i valori del parametro per i quali la concavità della parabola è rivolta verso l'alto, scrivo innanzi tutto il fascio in forma esplicita:

$$y=\frac{1-k}{k+1}\,x^2+\frac{3k-1}{k+1}\,x+\frac{2k-4}{k+1}$$

Perché la concavità della parabola sia rivolta verso l'alto, il coefficiente del termine di secondo grado deve essere positivo:

$$\frac{1-k}{k+1}>0 \qquad \begin{matrix} N>0 & k<1 \\ D>0 & k>-1 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{-1<k<1}$$

B. Per determinare la parabola passante per il punto P, devo sostituire le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$-2k-2+4k-4+2-6k+4-2k=0 \qquad -6k=0 \qquad \boldsymbol{k=0}$$

C. Siccome la retta $y=-2$ passa per uno dei punti base, B, per ottenere un segmento di lunghezza 6 su tale retta, dovrà passare anche per il punto $(5;\ -2)$ oppure per il punto $(-7;\ -2)$. Impongo il passaggio del fascio per i due punti:

$$-2k-2+25k-25+5-15k+4-2k=0 \qquad 6k=18 \qquad \boldsymbol{k=3}$$

$$-2k-2+49k-49-7+21k+4-2k=0 \qquad 66k=54 \qquad \boldsymbol{k=\frac{9}{11}}$$

D. Per essere tangente alla retta $y=-2$, la parabola deve avere nel punto base B il suo vertice:

$$-\frac{b}{2a}=-1 \qquad b=2a \qquad \frac{3k-1}{k+1}=2\,\frac{1-k}{k+1} \qquad 3k-1=2-2k \qquad \boldsymbol{k=\frac{3}{5}}$$

E. Metto a sistema l'equazione del fascio di parabole con l'equazione della retta e pongo uguale a zero il delta della risolvente:

$$\begin{cases} (k+1)\,y + (k-1)\,x^2 + (1-3k)\,x + 4 - 2k = 0 \\ 7x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (k+1)\,y + (k-1)\,x^2 + (1-3k)\,x + 4 - 2k = 0 \\ y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{7}{3}kx + \frac{1}{3}k + \frac{7}{3}x + \frac{1}{3} + (k-1)\,x^2 + x - 3kx + 4 - 2k = 0$$

$$3\,(k-1)\,x^2 + 2x\,(5-k)\,x + 13 - 5k = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (5-k)^2 - 3(k-1)\,(13-5k) = 0$$

$$25 - 10k + k^2 - 39k + 15\,k^2 + 39 - 15k = 0$$

$$16\,k^2 - 64\,k + 64 = 0 \qquad k^2 - 4k + 4 = 0 \qquad (k-2)^2 = 0 \qquad \boldsymbol{k = 2}$$

Per il valore nullo di k ottengo una delle due generatrici:

$$y = x^2 - x - 4$$

Determino il punto di ascissa 2 appartenente alla parabola, sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola per determinare l'ordinata:

$$C\ (2;\ -2)$$

Il vertice della parabola ha coordinate:

$$V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right)$$

Determino le coordinate del fuoco:

$$F\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}; -4\right)$$

Posso calcolare la base VF:

$$\overline{VF} = \left|-\frac{17}{4} + 4\right| = \frac{1}{4}$$

Determino l'altezza del triangolo come distanza del vertice C dall'asse di simmetria della parabola:

$$h = d(C, \overline{VF}) = \left|2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Ora posso determinare l'area del triangolo:

$$Area = \frac{\overline{VF} \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{16}}$$