1. Un contenitore di $0{,}010\ m^3$ viene riempito di elio (He), un gas monoatomico, alla pressione di $6{,}2 \cdot 10^5\ Pa$. Per quanto tempo dovrebbe funzionare un motore da $0{,}23\ hp$ $(1\ hp = 746\ W)$ per produrre una quantità di energia uguale all'energia interna di questo gas?

$$V = 0{,}010\ m^3 \qquad p = 6{,}2 \cdot 10^5\ Pa \qquad P = 0{,}23\ hp \qquad 1\ hp = 746\ W \qquad \Delta t?$$

L'energia interna del gas monoatomico è data da: $U = \frac{3}{2} nRT$ e, per l'equazione di stato del gas perfetto: $pV = nRT$, quindi: $U = \frac{3}{2} pV$.

La potenza è data dal rapporto tra energia interna e tempo, perciò possiamo determinare il tempo come rapporto tra energia interna e potenza:

$$P = \frac{U}{\Delta t} \qquad \Delta t = \frac{U}{P} = \frac{3pV}{2P} = \mathbf{54\ s}$$

2. Un recipiente che contiene $0{,}291\ mol$ di Argon (monoatomico) viene riscaldato portando la temperatura del gas da $290\ K$ a $315\ K$. Considera il gas come un gas perfetto. Calcola l'energia interna del gas prima di essere riscaldato. L'aumento di temperatura fa aumentare o diminuire l'energia interna? Calcola la percentuale di variazione dell'energia interna.

$$n = 0{,}291\ mol \qquad T_1 = 290\ K \qquad T_2 = 315\ K \qquad U_1? \qquad \frac{\Delta U}{U_1}?$$

Determino innanzi tutto l'energia interna che, trattandosi di un gas monoatomico, è data da:

$$U_1 = \frac{3}{2} nRT_1 = \mathbf{1{,}05 \cdot 10^3\ J}$$

L'aumento di temperatura fa aumentare l'energia interna, visto che l'energia interna è direttamente proporzionale alla temperatura, infatti:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} nRT_2 - \frac{3}{2} nRT_1 = \frac{3}{2} nR\,(T_2 - T_1)$$

E siccome $\Delta T > 0$, anche $\Delta U > 0$.
Determino la percentuale di variazione dell'energia interna:

$$\frac{\Delta U}{U_1} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{2} nR\,(T_2 - T_1)}{\frac{3}{2} nRT_1} \cdot 100 = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \cdot 100 = \mathbf{8{,}62\ \%}$$

3. La figura che segue mostra la forma della curva di Maxwell per un certo gas perfetto che contiene N molecole. Calcola con buon approssimazione la percentuale di molecole del gas che hanno un modulo della velocità compreso tra $\frac{1}{2} v_{max}$ e $\frac{3}{4} v_{max}$, ricordando che $v_{max} = \sqrt{2\frac{k_B T}{m}}$.

$$v_1 = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{k_B T}{m}} \qquad v_2 = \frac{3}{4} v_{max} = \frac{3}{4}\sqrt{2\frac{k_B T}{m}} \qquad \frac{\Delta N}{\Delta v} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2\, e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \qquad N_{\%}?$$

Applichiamo la legge della distribuzione delle velocità di Maxwell per calcolare l'ordinata corrispondente alle due velocità. Procediamo calcolando l'area sottesa dal grafico, approssimata dall'area di un trapezio rettangolo, che ha per base minore l'ordinata di v_1, per base maggiore l'ordinata di v_2 e per altezza la differenza tra le due velocità:

$$N_{\%} = \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (v_2 - v_1) \cdot \frac{100}{N} = \frac{200}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{4} \cdot 2\frac{k_B T}{m} \cdot e^{-m\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot 2\frac{k_B T}{m}}{2k_B T}} + \frac{9}{16} \cdot 2\frac{k_B T}{m} \cdot e^{-m\cdot\frac{\frac{9}{16}\cdot 2\frac{k_B T}{m}}{2k_B T}}\right]\left(\frac{3}{4}\sqrt{2\frac{k_B T}{m}} - \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{k_B T}{m}}\right) =$$

$$= \frac{200}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2\frac{k_B T}{m} \cdot \sqrt{2\frac{k_B T}{m}} \cdot \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{9}{16} e^{-\frac{9}{16}}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2\sqrt{\pi}}\left(e^{-\frac{1}{4}} + \frac{9}{4} e^{-\frac{9}{16}}\right) = \mathbf{14{,}5\ \%}$$

4. Sapendo che la velocità quadratica media delle molecole di un gas a $0°C$ è uguale a $484\ m/s$, calcola la velocità quadratica media a $37{,}0°C$.

$$T_1 = 273\ K \qquad v_1 = 484\ m/s \qquad T_2 = 310\ K \qquad v_2?$$

Dalla relazione tra energia cinetica traslazionale e temperatura:

$$K_{m_T} = \frac{3}{2}k_B T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}m < v >^2 = \frac{3}{2}k_B T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{< v >^2}{T} = \frac{3k_B}{m}$$

Siccome la quantità a secondo membro è costante:

$$\frac{< v >_1^2}{T_1} = \frac{< v >_2^2}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad < v >_2 = < v >_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \mathbf{516\ m/s}$$

5. Quanti atomi di elio riempiono un pallone di diametro 30,0 cm a 20,0°C e a 1 atm? Qual è l'energia cinetica media per ciascun atomo di elio?

$$d = 30{,}0\ cm \qquad T_1 = 20{,}0°C \qquad p = 1\ atm = 1{,}01 \cdot 10^5\ Pa \qquad N? \qquad K_m?$$

Non conoscendo il numero di moli, applico l'equazione di stato del gas perfetto per determinare il numero degli atomi di elio e la relazione: $N = nN_A$:

$$pV = nRT \qquad n = \frac{pV}{RT} \qquad N = nN_A = N_A \frac{pV}{RT} = \mathbf{3,53 \cdot 10^{23}}$$

L'energia cinetica media di un gas monoatomico (l'elio è monoatomico – cfr ex 1) è data da:

$$K_m = \frac{3}{2}k_B T = \mathbf{6,07 \cdot 10^{-21}\ J}$$

6. Si racconta che il famoso fisico Enrico Fermi, durante un esame, abbia rivolto ad uno studente questa domanda: «Il punto di ebollizione dell'olio di oliva è più alto del punto di fusione dello stagno. Spieghi com'è possibile friggere del cibo in una padella contenente olio di oliva, dato che il fondo delle padelle è spesso fatto di rame stagnato». Qual è secondo te la risposta esatta? Argomenta.

Quando il cibo frigge non è l'olio a bollire, ma l'acqua presente nel cibo, e naturalmente la temperatura di ebollizione dell'acqua è inferiore alla temperatura di fusione dello stagno.

7. È noto che conviene mettere un cucchiaino di metallo in una tazza di porcellana prima di versarvi un liquido molto caldo, ad esempio del tè. Perché? Secondo te è più sicuro adoperare una tazza dalle pareti sottili o una dalle pareti spesse?

È utile mettere il cucchiaino nella tazza perché i metalli sono buoni conduttori di calore e diminuisce lo shock termico, visto che il calore viene assorbito dal cucchiaino. Quando si versa un liquido caldo in una tazza, si riscaldano prima gli strati interni delle pareti e poi gradualmente quelli esterni. Il riscaldamento disomogeneo causa a sua volta un'espansione disomogenea e la tazza si può rompere. Per questo motivo le pareti spesse si rompono più facilmente di quelle sottili.