Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1. $sen\frac{5}{2}\pi \cdot cosec\frac{25}{6}\pi + \cos\frac{3}{2}\pi \cdot cosec\frac{\pi}{2} + tg\frac{3}{4}\pi \cdot sen\frac{5}{6}\pi$

$$1 \cdot 2 + 0 - 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

2. $\left[sen^2\frac{3}{4}\pi + \cos^2\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]^4 - \left[\sec^2\frac{8}{3}\pi - cosec^2\frac{11}{6}\pi\right]^3 - \left[tg^2\frac{7}{4}\pi + ctg^2\frac{5}{6}\pi\right]^2$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^4 - [(-2)^2 - (-2)^2]^3 - \left[(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^4 - (4-4)^3 - (1+3)^2 = 1 - 0 - 16 = \mathbf{-15}$$

3. $(a^2 - b^2)\ sen\frac{9}{2}\pi + 2ab\cos\frac{3}{4}\pi \cdot sen\frac{5}{4}\pi + a^2 ctg\frac{7}{6}\pi \cdot tg\left(-\frac{7}{6}\pi\right) - b^2\cos(-7\pi)$

$$(a^2 - b^2) \cdot 1 + 2ab\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a^2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - b^2(-1) = a^2 - b^2 + ab - a^2 + b^2 = \boldsymbol{ab}$$

Semplifica le seguenti espressioni supponendo che i valori delle variabili che in esse figurano soddisfino le condizioni di esistenza:

4. $tg\,(2\pi + \alpha) - ctg\,(-\alpha) + \sqrt{2}\,sen\frac{\pi}{4}\ tg\,(\pi - \alpha) - ctg\,(\pi + \alpha)$

$$= tg\alpha + ctg\alpha + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(-tg\alpha) - ctg\,\alpha = tg\,\alpha + ctg\,\alpha - tg\,\alpha - ctg\,\alpha = \mathbf{0}$$

5. $\dfrac{sen\,(2\pi - \alpha)\,ctg(-\alpha) - \cos\,(\pi - \alpha)}{\sqrt{2}\,sen\frac{\pi}{4}\cos\,(\pi + \alpha)} - \dfrac{\cos\,(-\alpha)\ tg\,(\pi - \alpha) + sen\,(\alpha - \pi)}{2\sqrt{3}\,sen\frac{\pi}{3}\ sen\,(-\alpha)}$

$$\frac{-sen\,\alpha\,(-ctg\,\alpha) + \cos\,\alpha}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\,\alpha)} - \frac{\cos\,\alpha\ (-tg\,\alpha) - sen\,\alpha}{2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}(-sen\,\alpha)} = \frac{sen\,\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} + \cos\alpha}{-\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha\left(-\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\right) - sen\,\alpha}{-3\,sen\,\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha + \cos\alpha}{-\cos\alpha} - \frac{-sen\,\alpha - sen\,\alpha}{-3\,sen\,\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{-\cos\alpha} - \frac{-2\,sen\alpha}{-3\ sen\,\alpha} = -2 - \frac{2}{3} = \mathbf{-\frac{8}{3}}$$

6. $sen\,150°\cos\,135° - \cos\,300°\;sen\,225° + cosec\,330°\;tg\,300° - 2\cos 60°\;sen\,120°\;tg\,30°$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\cdot(-\sqrt{3})-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\mathbf{2\sqrt{3}-\frac{1}{2}}$$

7. $2\cos\frac{5}{2}\pi + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - 3\,sen\,\alpha + sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$2\cdot 0+3\,sen\,\alpha-3\,sen\,\alpha+\cos\,\alpha-\frac{3}{2}\,sen\,\alpha=\boldsymbol{\cos\alpha-\frac{3}{2}sen\alpha}$$

8. $\frac{5}{8}\left[\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-sen^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[sen^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)\right]$

$$\frac{5}{8}\left[\left(\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}+sen\,\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(sen\,\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(sen\,\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\,\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,\alpha\right)^2\right]=$$

$$=\frac{5}{8}\cdot 0+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sen^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\,\alpha+sen\,\alpha\cos\,\alpha-\frac{1}{2}\cos^2\,\alpha-\frac{1}{2}\,sen^2\,\alpha+sen\,\alpha\cos\alpha\right)=\boldsymbol{sen\,\alpha\,\cos\,\alpha}$$

9. $\left(\cos\frac{\alpha}{2}-sen\frac{\alpha}{2}\right)^2-6\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-1+(1+\cos\alpha)\,tg\frac{\alpha}{2}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2}-6\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-sen\frac{\pi}{4}\;sen\frac{\alpha}{2}\right)^2-1+(1+\cos\alpha)\frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha}=$$

$$=1-sen\alpha-6\left(\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}sen^2\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2}\right)-1+sen\,\alpha=$$

$$=-6\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\;sen\frac{\alpha}{2}\right)=-3+3\,sen\,\alpha=\mathbf{3\,(}\boldsymbol{sen\,\alpha-1}\mathbf{)}$$

10. Dopo aver espresso in funzione di $t = tg\frac{\alpha}{2}$ la seguente espressione, calcolane il valore sapendo che $\alpha = 2\,arctg\frac{4}{3}$:
$\left(\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{1+sen\,\alpha}{sen\,\alpha}\right) sen\,\alpha$

$$\alpha = 2\,arctg\frac{4}{3} \qquad \frac{\alpha}{2} = arctg\frac{4}{3} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3} \qquad t = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} + \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\right)\frac{2t}{1+t^2} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2-1+t^2} + \frac{1+t^2+2t}{2t}\right)\frac{2t}{1+t^2} =$$

$$= \left(\frac{1-t^2}{2t^2} + \frac{t^2+2t+1}{2t}\right)\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1-t^2+t^3+2t^2+t}{2t^2}\,\frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2(t+1)+(t+1)}{t\,(1+t^2)} = \frac{t+1}{t} = \frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

11. Utilizzando le formule di prostaferesi, semplifica la seguente espressione:

$$\frac{\cos 80° + \cos 40°}{\sqrt{3}\cos 20°}$$

$$\frac{2\cos 60°\cos 20°}{\sqrt{3}\cos 20°} = \frac{2\cos 60°}{\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

12. Calcola il valore dell'espressione: $2\cos 75°\cos 15°$.

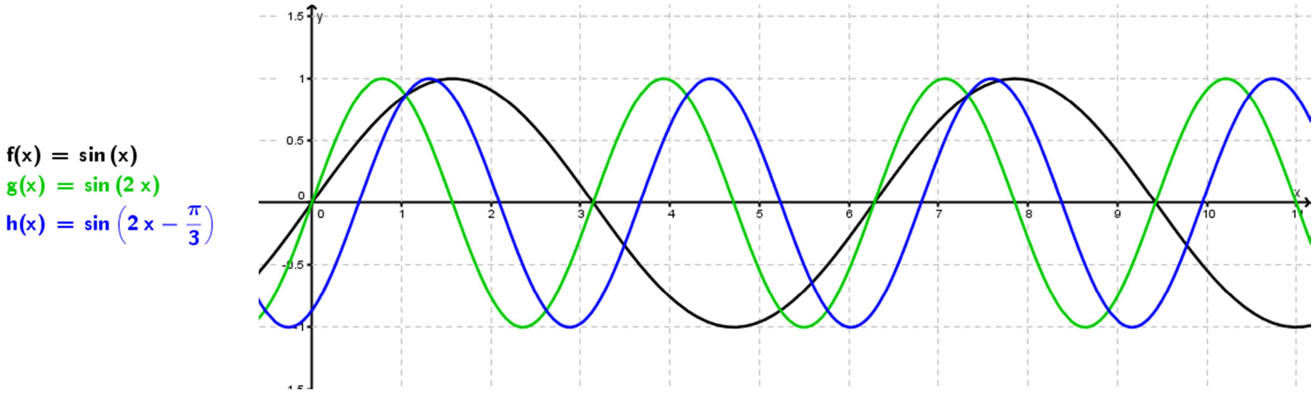
$$2\cos 75°\cos 15° = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\,(75°+15°) + \cos\,(75°-15°)\right] = \cos 90° + \cos 60° = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

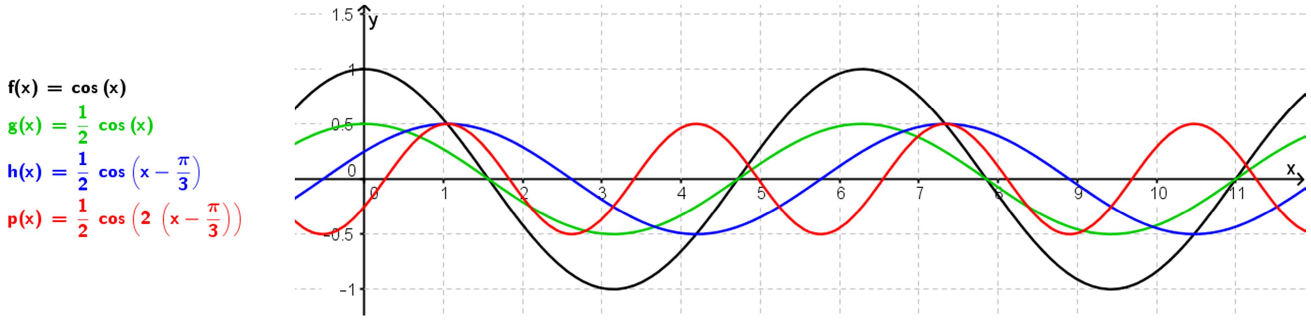
13. Calcola l'ampiezza degli angoli formati dalle rette $y = 3x - 2$ e $y = \frac{x}{2} + 1$.

$$tg\,\alpha = 3 \quad tg\,\beta = \frac{1}{2} \qquad tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta} = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

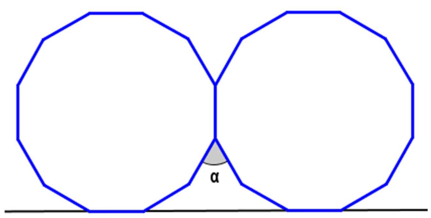
Gli angoli formati dalle due rette hanno ampiezza **45°** e **135°**.

14. Traccia il grafico di $y = sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ e di $y = \frac{1}{2}\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$.

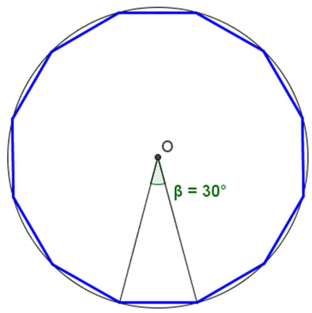




15. Una moneta da 50 centesimi australiani ha dodici lati di uguale lunghezza. Due monete sono in equilibrio come indicato nell'immagine a lato, sono appoggiate su un tavolo per un lato e hanno un lato in comune. Qual è l'ampiezza dell'angolo α indicato nell'immagine a lato?



Dobbiamo innanzi tutto determinare l'ampiezza degli angoli interni di un dodecagono regolare. Consideriamo la circonferenza circoscritta al poligono di centro O. Se prendiamo uno dei dodici triangoli congruenti in cui possiamo dividere il poligono, sappiamo che tali triangoli sono isosceli, visto che hanno per lato obliquo il raggio e per base il lato del dodecagono. Essendo congruenti, possiamo determinare l'ampiezza dell'angolo al vertice, equivalente a 360°/12, ovvero a 30°.
Gli angoli alla base del triangolo, considerato che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°, saranno di 75°. In un dodecagono regolare, gli angoli interni sono dati dalla somma di due angoli alla base dei triangoli dati, perciò gli angoli interni di un dodecagono regolare valgono 150°.
Nel disegno dato nel quesito, ci sono tre angoli adiacenti: due angoli interni del dodecagono e l'angolo α, ovvero vale la relazione:



$$150° + 150° + \alpha = 360° \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{60°}$$