Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1. $\cos 55° \cos 35° - \sin 55° \sin 35°$

   $= \cos(55° + 35°) = \cos 90° = \mathbf{0}$

2. $\cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{7}{6}\pi\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

   $= -\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}$

3. $\tan\frac{\alpha}{2}\left[\cos 2\pi + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] + \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\pi + \alpha)}$

   $= \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}(1 + \cos\alpha) + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-\cos\alpha} = \sin\alpha - 2\sin\alpha = \boldsymbol{-\sin\alpha}$

4. $\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} - \cos(\pi + \alpha) - \sin^2(-\alpha) + \sin^2(\pi - \alpha)$

   $= \frac{1 - \cos\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \cos\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} + \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{1}{2}\cos\alpha}$

5. $(1 - \cos\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin(-\alpha) - \sin(\pi - \alpha)$

   $= 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha - 4\frac{1 - \cos\alpha}{2} - \sin\alpha - \sin\alpha = 2 - 2\cos\alpha - 2 + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha = \boldsymbol{-2\sin\alpha}$

6. $2(1 - \sin\alpha)^2 - 4\sin(\pi + \alpha) + 2\cos 2\alpha + (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) - 4\cos^2\alpha$

   $= 2 - 4\sin\alpha + 2\sin^2\alpha + 4\sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 + 1 - \cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha = \boldsymbol{3\sin^2\alpha}$

Verifica le seguenti identità, nelle quali si suppongono verificate le condizioni di esistenza:

7. $\frac{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \cot\alpha$

   $\frac{1 + 2\cos^2\alpha - 1 + \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \cot\alpha$ $\qquad \frac{\cos\alpha\,(2\cos\alpha + 1)}{\sin\alpha\,(1 + 2\cos\alpha)} = \cot\alpha$ $\qquad \boldsymbol{\cot\alpha = \cot\alpha}$

8. $\cos 2\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

   $\cos 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)$ $\qquad \cos 2\alpha = \cos\frac{\pi}{2} + \cos 2\alpha$ $\qquad \boldsymbol{\cos 2\alpha = \cos 2\alpha}$

9. $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$

   $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$ $\qquad \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$ $\qquad \boldsymbol{\cos^2\alpha = \cos^2\alpha}$

10. $\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\tan\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}{\csc\alpha + \cos\alpha\cot\alpha + 6} = \frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$

   $\frac{\frac{1 + \cos\alpha}{2} + \frac{3\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + 6} = \frac{\frac{1}{2}\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ $\qquad \frac{\frac{1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 6\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}}{\frac{1 + \cos^2\alpha + 6\sin\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}$

   $\frac{1 + \cos^2\alpha + 6\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}\cdot\frac{\sin\alpha}{1 + \cos^2\alpha + 6\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}$ $\qquad \boldsymbol{\frac{\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}}$

11. Determina il valore dei parametri a e b affinché sia verificata la seguente identità:

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{1+\cos\alpha}=a\tan\frac{\alpha}{2}+b$$

$$\frac{\cos\alpha+1}{1+\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=a\tan\frac{\alpha}{2}+b \qquad 1-\tan\frac{\alpha}{2}=a\tan\frac{\alpha}{2}+b \qquad \boldsymbol{a=-1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{b=1}$$

12. Considera la funzione $f(x)=\frac{1+a\cos x}{\sin x-b\cos x-3}$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina per quali valori di a e b la funzione interseca l'asse y in $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$ e ha uno zero in π.

Impongo il passaggio per i punti $(\pi;0)$ e $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$ e, messe a sistema le due equazioni, determino i valori dei parametri richiesti:

$$\begin{cases}\frac{1-a}{0+b-3}=0\\ \frac{1+a}{0-b-3}=-\frac{1}{3}\end{cases} \qquad \begin{cases}a=1\\ 6=b+3\end{cases} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{a=1}\\ \boldsymbol{b=3}\end{cases}$$

13. Trova il periodo della funzione $f(x)=\sin\frac{2}{3}x+\sin\frac{1}{4}x$.

Il periodo di $y=\sin\frac{2}{3}x$ è: $T_1=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$; il periodo di $y=\sin\frac{1}{4}x$ è: $T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$. Il periodo dell'intera funzione è:

$$T=m.c.m.(T_1,T_2)=\boldsymbol{24\,\pi}$$

14. Verifica che in ogni triangolo rettangolo, indicando con α, β e γ gli angoli interni, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad \sin 8\alpha+\sin 8\beta+\sin 8\gamma=0$$

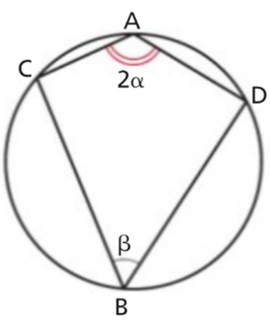
Dato il triangolo rettangolo, sia $\gamma=\frac{\pi}{2}$ e $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, dato che in un triangolo rettangolo un angolo è retto e gli altri due angoli acuti sono complementari. Risolvo le due relazioni, sostituendo i dati:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2\frac{\pi}{2}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+0=1 \qquad c.v.d.$$

$$\sin 8\alpha+\sin\left(8\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)+\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin 8\alpha+\sin(4\pi-8\alpha)+\sin 4\pi=\sin 8\alpha-\sin 8\alpha+0=0 \qquad c.v.d.$$

15. Verifica che, per il quadrilatero in figura a lato, risulta:

$$\left(-\tan\beta+\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\frac{\sin\beta}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{1+\tan\alpha}$$



Trattandosi di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, i suoi angoli opposti sono supplementari:

$$2\alpha+\beta=\pi \quad\Rightarrow\quad \beta=\pi-2\alpha$$

Sostituisco quanto trovato nell'espressione data, per verificarla:

$$\left(-\tan(\pi-2\alpha)+\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}\right)\cdot\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{1+\tan\alpha}$$

$$\left(\tan 2\alpha+\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}\right)\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{1+\tan\alpha}$$

$$\left(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{\tan\alpha}{-(1-\tan\alpha)}\right)\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{1+\tan\alpha} \qquad \frac{\tan\alpha\,(2-1-\tan\alpha)}{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}\cdot\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{1+\tan\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{1+\tan\alpha}\cdot\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{1+\tan\alpha} \qquad \boldsymbol{1=1}$$

16. Considera la funzione $y = 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x$.
   A. Trasformala in modo da ottenere una funzione lineare in seno e coseno.
   B. Determina il periodo.
   C. Disegna il grafico.

A. $y = 2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \sin 2x$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$

B. $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

C. Per disegnare il grafico, noto che la funzione subisce una contrazione lungo l'asse x, poi una traslazione verso sinistra di $\frac{\pi}{4}$, una nuova dilatazione lungo l'asse y e infine una traslazione verso l'alto di 1:

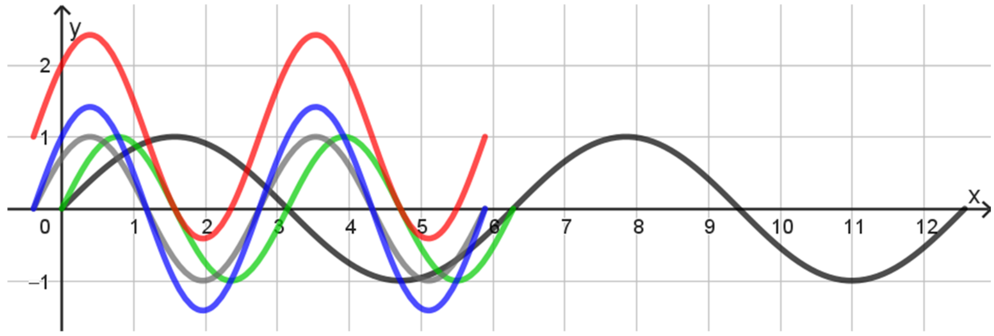
$y = \sin x$

$y = \sin 2x$

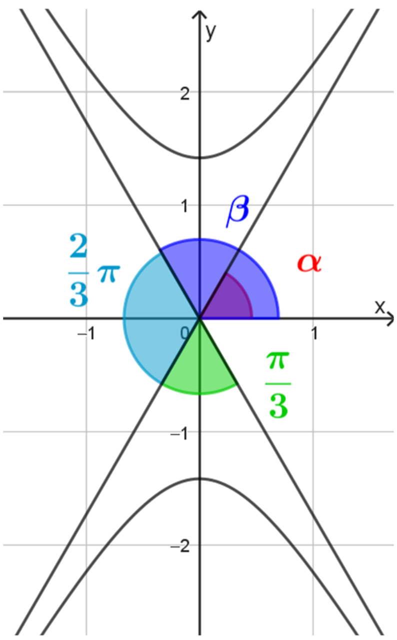
$y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$y = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$y = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$



17. Data l'iperbole di equazione $3x^2 - y^2 = -2$, determina l'ampiezza dell'angolo acuto formato dai suoi asintoti.



Scrivo l'equazione dell'iperbole in forma canonica:

$$\frac{x^2}{\frac{2}{3}} - \frac{y^2}{2} = -1$$

L'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ e le equazioni generiche degli asintoti sono: $y = \pm\frac{b}{a}x$. In questo caso:

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}x \qquad y = \pm\sqrt{3}x$$

Il coefficiente angolare della retta corrisponde alla tangente dell'angolo formato con la direzione positiva dell'asse x, perciò:

$$y = \sqrt{3}x \qquad \tan\alpha = \sqrt{3} \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$y = -\sqrt{3}x \qquad \tan\beta = -\sqrt{3} \qquad \beta = \frac{2}{3}\pi$$

Gli angoli formati dalle due rette hanno ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$. Perciò la risposta è: $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$.