Semplifica le seguenti espressioni:

1. $(x-y)(x+y)-(x-y)^2+(x-y)^3-(x+y)(x^2-xy+y^2)+3xy\left(x-y-\frac{2}{3}\right)$

$= x^2-y^2-(x^2+y^2-2xy)+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-(x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3)+3x^2y-3xy^2-2xy =$

$= x^2-y^2-x^2-y^2+2xy+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-x^3-y^3+3x^2y-3xy^2-2xy = \mathbf{-2y^2-2y^3}$

2. $3x\,(x^6-1)(x^2+x^4)-3x^3(x^3-1)(x^3+1)-(-x^3)^2-3x^3(x^8-x^2)$

$= 3x\,(x^8++x^{10}-x^2-x^4)-3x^3(x^6-1)-(x^6)-3x^{11}+3x^5 =$

$= 3x^9+3x^{11}-3x^3-3x^5-3x^9+3x^3-x^6-3x^{11}+3x^5 = \mathbf{-x^6}$

3. $(a+2b-c)^2-(a+b)^2+4b\,(c-a-b)+2a\,(a+b+c)-(b-c)(-b-c)$

$= a^2+4b^2+c^2+4ab-2ac-4bc-(a^2+b^2+2ab)+4bc-4ab-4b^2+2a^2+2ab+2ac-(-b^2+c^2) =$

$= a^2+c^2-a^2-b^2-2ab+2a^2+2ab+b^2-c^2 = \mathbf{2a^2}$

4. $\left[(a^n+b^n)(b^n-a^n)+(4a^n+2b^n)\left(\frac{1}{4}a^n+\frac{1}{2}b^n\right)+2{,}5\,a^nb^n\right]^2-b^{2n}\,(5a^n+2b^n)^2$

$= \left(b^{2n}-a^{2n}+a^{2n}+2a^nb^n+\frac{1}{2}a^nb^n+b^{2n}+\frac{5}{2}a^nb^n\right)^2-b^{2n}\,(25a^{2n}+4b^{2n}+20a^nb^n) =$

$= (2b^{2n}+5a^nb^n)^2-25a^{2n}b^{2n}-4b^{4n}-20a^nb^{3n} =$

$= 4b^{4n}+25a^{2n}b^{2n}+20a^nb^{3n}-25a^{2n}b^{2n}-4b^{4n}-20a^nb^{3n} = \mathbf{0}$

5. Completa, in modo che l'uguaglianza risulti sempre vera:

$(\mathbf{x}-3b)^2 = \mathbf{x^2}-6bx+9b^2$ $\quad$ $(\mathbf{x^2}+xy)^3 = \mathbf{x^6+3x^5y}+3x^4y^2+x^3y^3$ $\quad$ $(\mathbf{9}+2z)(\mathbf{9}-\mathbf{2z}) = 81\mathbf{-4z^2}$

Determina quoziente e resto delle seguenti divisioni:

6. $(15\,a^5 - 9a^3 + 21a^2 - 2 - 10a^4) : (5a^2 - 3)$

$15\,a^5$	$-10a^4$	$-9a^3$	$21\,a^2$		-2	$5a^2 - 3$
$-15\,a^5$		$+9a^3$				$3a^3 - 2a^2 + 3$
	$-10a^4$		$21\,a^2$		-2	
	$10a^4$		$-6\,a^2$			
			$15\,a^2$		-2	
			$-15\,a^2$		9	
					7	

$$Q(a) = \mathbf{3a^3 - 2a^2 + 3} \qquad R(a) = \mathbf{7}$$

7. $(x^4 - 3x^3 - 2x - 6 + 2x^2) : (x - 3)$

	1	-3	2	-2	-6
3		3	0	6	12
	1	0	2	4	6

$$Q(x) = \mathbf{x^3 + 2x + 4} \qquad R(a) = \mathbf{6}$$

8. $(8y^3 - 12y^2 - 2y + 1) : (2y - 3) = \left(4y^3 - 6y^2 - y + \frac{1}{2}\right) : \left(y - \frac{3}{2}\right)$

	4	-6	-1	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$		6	0	$-\frac{3}{2}$
	4	0	-1	-1

$$Q(y) = \mathbf{4y^2 - 1} \qquad R(a) = \mathbf{-2}$$

9. Calcola le seguenti potenze di binomio: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ $\qquad (a + x)^6$

Utilizzando il triangolo di Tartaglia:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 = x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$(a + x)^6 = a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + 20a^3x^3 + 15a^2x^4 + 6ax^5 + x^6$$

10. Esegui i seguenti calcoli usando i prodotti notevoli:

$$1001^2 = (1000 + 1)^2 = 1\,000\,000 + 1 + 2\,000 = \mathbf{1\,002\,001}$$

$$305 \cdot 295 = (300 + 5)(300 - 5) = 90\,000 - 25 = \mathbf{89\,975}$$

11. Le misure della base e dell'altezza di un rettangolo sono rispettivamente a e b. Se si aumenta la base del 20% e l'altezza del 30%, di quanto aumenta la misura dell'area in percentuale?

Aumentando la base del 20% diventa: $a + \frac{20}{100}a = a + \frac{1}{5}a = \frac{6}{5}a$

Aumentando l'altezza del 30% diventa: $b + \frac{30}{100}b = b + \frac{3}{10}b = \frac{13}{10}b$

Faccio la differenza tra le due aree, ricordando che l'area di un rettangolo si calcola moltiplicando tra loro base e altezza:

$$\frac{6}{5}a \cdot \frac{13}{10}b - ab = \frac{39}{25}ab - ab = \frac{14}{25}ab$$

Posso determinare la percentuale:

$$\frac{14}{25} = \frac{56}{100} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{56\%}$$

12. Dimostra che se aggiungiamo 1 al prodotto di due numeri che differiscono di due unità otteniamo il quadrato del numero tra essi compreso (indicando ogni numero con un opportuno polinomio e facendo il prodotto…)

Indico i due numeri, rispettivamente, con il binomio $x - 1$ e il binomio $x + 1$ ed eseguendo i calcoli:

$$(x - 1)(x + 1) + 1 = x^2 - 1 + 1 = \boldsymbol{x^2}$$

c.v.d.