1. Calcola i seguenti limiti:

A. $\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{6}{x^2}} \lim_{x\to 0}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{6}{x^2}} =$ $\quad 1+\frac{1}{y}=\cos x \quad \frac{1}{y}=\cos x-1 \quad y=\frac{1}{\cos x-1}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{6(\cos x-1)}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{6\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}} = \boldsymbol{e^{-3}}$$

B. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \mathbf{1}$

C. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-(e^x-1)-(1-\cos x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-\frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(-1-\frac{1}{2}x\right)}{x} = \mathbf{-1}$

D. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^3\sin^3 2x}{\ln(1+7x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^3\sin^3 2x}{\ln(1+7x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^3\cdot(2x)^3}{7x^6} = \mathbf{\frac{24}{7}}$

E. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x}$ $\quad 1+\frac{1}{y}=\frac{3x+2}{3x-1} \quad \frac{1}{y}=\frac{3}{3x-1} \quad y=x-\frac{1}{3}$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y+\frac{2}{3}} = \lim_{y\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^2\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} = \boldsymbol{e^2}$$

F. $\lim_{x\to+\infty}\left(9^{-x}\left(3+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\left(3+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x\cdot\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\sqrt[3]{e^2}}$

G. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x) = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

H. $\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \mathbf{1}$ $\quad y=arc\sin x \quad x=\sin y$

I. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2}{2x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{e^2\left(e^{2x-2}-1\right)}{2x-2} = e^2\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = e^2\lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = \boldsymbol{e^2}$ $\quad y=x-1$

L. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2(1+\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}2(1+\cos 2x) = \mathbf{4}$

2. Calcola il valore del parametro a per cui:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3-x)-\ln 3}{ax}=-\frac{1}{6}$$

Calcolo il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3-x)-\ln 3}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{3-x}{3}}{ax}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{ax}}=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{3}{x}}\right)^{-\frac{3}{x}}\right]^{\frac{1}{-3a}}=-\frac{1}{3a}$$

Pongo il risultato ottenuto uguale a quello dato dal testo: $-\frac{1}{3a}=-\frac{1}{6}$ $\boldsymbol{a=2}$

3. Una spira di area $5{,}0\cdot 10^{-3}\ m^2$ è immersa in un campo magnetico variabile $B(t)=0{,}3+0{,}4\ t^2$. Quanto vale il modulo della forza elettromotrice all'istante $t=2\ s$?
(Ricorda che $f_{em}=-\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$ e, in generale, $\frac{df(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$)

$$\frac{dB(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{0{,}3+0{,}4\ (t+h)^2-(0{,}3+0{,}4\ t^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0{,}3+0{,}4\ t^2+0{,}4\ h^2+0{,}8\ th-0{,}3-0{,}4\ t^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\ (0{,}4\ h+0{,}8\ t)}{h}=\lim_{h\to 0}(0{,}4\ h+0{,}8\ t)=0{,}8\ t \quad\Rightarrow\quad |f_{em}|=\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}=0{,}8\ t\cdot 5{,}0\cdot 10^{-3}=4{,}0\cdot 10^{-3}\ t$$

Sostituendo il valore dell'istante $t=2\ s$, ottengo il valore della forza elettromotrice istantanea:

$$|f_{em}|=\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}=\boldsymbol{8{,}0\cdot 10^{-3}\ V}$$

4. Determina i valori dei parametri affinché la seguente funzione sia continua in tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{3x}-1}{x}+2ax+b & x<0\\ 2x-a & 0\le x\le 1\\ \frac{2b}{\log_3(2+x)} & x>1\end{cases}$$

Il primo tratto è continuo per $x\neq 0$, il secondo tratto è sempre continuo, il terzo è continuo per $x>-2$ e per $x\neq -1$. Devo perciò imporre la continuità per $x=0$ e $x=1$:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}+2ax+b\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{3x}{x}+2ax+b\right)=3+b \qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-a \quad\Rightarrow\quad 3+b=-a$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2b}{\log_3(2+x)}=2b \qquad \lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=2-a \quad\Rightarrow\quad 2b=2-a$$

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases}a+b=-3\\ a+2b=2\end{cases} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{a=-8}\\ \boldsymbol{b=5}\end{cases}$$

5. Date le seguenti funzioni, individua e classifica i loro punti di discontinuità:

$$f(x) = \frac{1}{9 - 3^{\frac{1}{x}}} \qquad f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x}$$

Determino innanzi tutto il dominio della prima funzione:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 9 - 3^{\frac{1}{x}} \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ 3^2 \neq 3^{\frac{1}{x}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Studio quindi la discontinuità nei due punti, calcolando i limiti destro e sinistro della funzione nei due punti:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{9 - 3^{\frac{1}{x}}} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{9 - 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{9} \qquad x = 0 \ \ punto\ di\ disc.di\ \boldsymbol{I\ Specie}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{9 - 3^{\frac{1}{x}}} = +\infty \qquad x = \frac{1}{2} \ \ punto\ di\ disc.di\ \boldsymbol{II\ Specie}$$

Determino il dominio della seconda funzione:

$$x^3 - 9x \neq 0 \qquad x(x^2 - 9) \neq 0 \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

Studio quindi la discontinuità nei tre punti, calcolando i limiti destro e sinistro della funzione nei tre punti:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\,(x-3)}{x\,(x-3)(x+3)} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x} = \frac{1}{3} \qquad x = 0 \ \ punto\ di\ disc.di\ \boldsymbol{III\ Specie}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x} = \frac{1}{6} \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x} = \frac{1}{6} \qquad x = 3 \ \ punto\ di\ disc.di\ \boldsymbol{III\ Specie}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x} = +\infty \qquad x = -3 \ \ punto\ di\ disc.di\ \boldsymbol{II\ Specie}$$

6. Traccia il grafico probabile di una delle seguenti funzioni, dopo averne studiato tutte le caratteristiche: __________ / 15

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{|\,x+1\,|} \qquad\qquad f(x)=\frac{e^x+6}{e^x+3}$$

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{|\,x+1\,|}$$

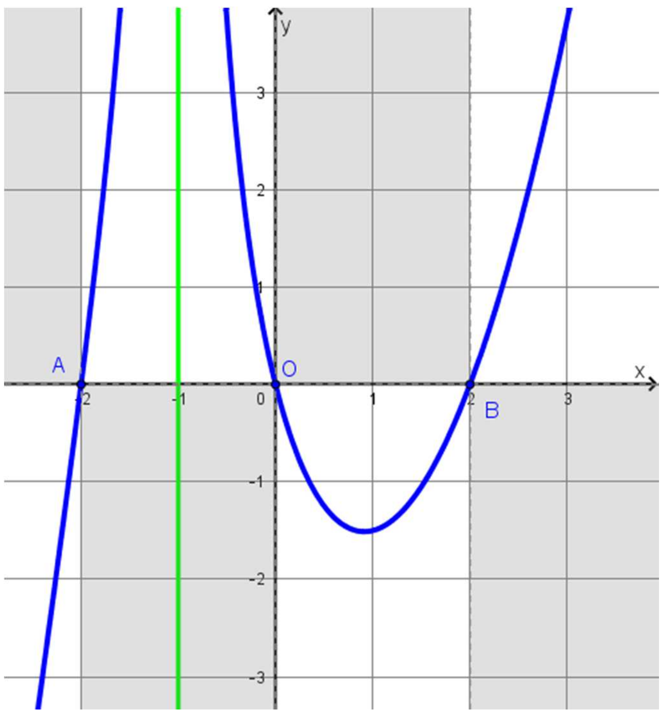
1. Dominio: $\boldsymbol{D}=\left]-\infty;\ -\mathbf{1}\right[\ \cup\ \left]-\mathbf{1};\ +\infty\right[$

2. Eventuali simmetrie: visto il dominio non è **né pari né dispari**

3. Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3-4x}{|x+1|} \\ y=0 \end{cases} \qquad x\,(x^2-4)=0$$

$\boldsymbol{O}\ (\mathbf{0};\mathbf{0}) \qquad \boldsymbol{A}\ (-\mathbf{2};\mathbf{0}) \qquad \boldsymbol{B}\ (\mathbf{2};\mathbf{0})$



4. Positività:

$$\frac{x^3-4x}{|x+1|}>0 \qquad x\,(x-2)(x+2)>0$$

$$-\mathbf{2}<\boldsymbol{x}<\mathbf{0} \quad \vee \quad \boldsymbol{x}>\mathbf{2}$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{x^3-4x}{|x+1|}=+\infty \qquad \boldsymbol{x=-1}\ \ \boldsymbol{asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4x}{|x+1|}=\pm\infty \qquad può\ esistere\ asintoto\ obliquo$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4x}{x\,|x+1|}=+\infty$$

non esiste asintoto obliquo

$$f(x) = \frac{e^x + 6}{e^x + 3}$$

1. Dominio: $\boldsymbol{D = \mathbb{R}}$

2. Eventuali simmetrie: $f(-x) \neq \pm f(x)$ non è **né pari né dispari**

3. Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \dfrac{e^x + 6}{e^x + 3} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{e^x + 6}{e^x + 3} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{7}{4} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\left(0; \frac{7}{4}\right)}$$

4. Positività:

$$\frac{e^x + 6}{e^x + 3} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 6}{e^x + 3} = 2 \qquad \boldsymbol{y = 2 \quad asintoto\ orizzontale}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 6}{e^x + 3} = 1 \qquad \boldsymbol{y = 1 \quad asintoto\ orizzontale}$$