1. Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

	V	F		V	F
$\sqrt{9} = \pm 3$	☐	☑	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{15}$	☐	☑
$\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$	☑	☐	$\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{-4} = 2\sqrt[5]{4}$	☑	☐
$-\sqrt{-3} = \sqrt{3}$	☐	☑	$\sqrt[0]{5} = 1$	☐	☑
$\sqrt[4]{-3^2} > 0$	☐	☑	$\sqrt[n]{8^{5n}} = 2^{15} \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$	☑	☐
$\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$	☑	☐	$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4} = 4$	☐	☑
$\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} = 1 - \sqrt{5}$	☐	☑	$\sqrt[n^2]{3^{n^3}} = 3^n \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$	☑	☐
$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3$	☑	☐	$\sqrt[3n]{2^{4n}} = 2^n \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$	☐	☑
$\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$	☑	☐	$\sqrt[n+2]{4^{n+3}} = \sqrt{4} \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$	☐	☑
$2\sqrt[5]{7} - \sqrt[5]{7} = 1$	☐	☑	$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2}$	☐	☑
$\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3$	☐	☑	$-2 < \sqrt[3]{-7} < -1$	☑	☐
$\sqrt{9-1} = \sqrt{9} - 1$	☐	☑	$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$	☐	☑
$\sqrt{3^2+7^2} = 10$	☐	☑	$\sqrt[4]{4x^4} = \sqrt{2x^2}$	☑	☐
$\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} = 6$	☑	☐	$\sqrt[3]{-3} = \sqrt[6]{(-3)^2}$	☐	☑
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[7]{2}$	☐	☑	$\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$	☑	☐
$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^2 = 5$	☐	☑	$\sqrt[6]{\dfrac{3}{8}} : \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$	☑	☐

2. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{3}\sqrt{45} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{9}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{20}{9}} - \frac{13}{2}\sqrt{\frac{5}{36}} - \sqrt{\frac{2}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2} = \sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{12}\sqrt{5} - \frac{13}{12}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10}-1\right)^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right) =$$

$$= 5 + 2 - 2\sqrt{10} - \left(10 + 1 - 2\sqrt{10}\right) + 6 - 2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 11 - 2\sqrt{10} - 11 + 2\sqrt{10} - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16} + \sqrt{1 + \frac{5}{4}}} - 0{,}89} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{9}{4}}} - 0{,}89} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{2}} - 0{,}89} = \sqrt{\sqrt{\frac{25}{16}} - 0{,}89} = \sqrt{\frac{5}{4} - 0{,}89} = \sqrt{1{,}25 - 0{,}89} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

3. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo che tutti i fattori dei radicandi siano non negativi:

$$\left(2+\sqrt{a-4}\right)^2+\left(2-\sqrt{a-4}\right)^2-2\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)=$$

$$=4+a-4+4\sqrt{a-4}+4+a-4-4\sqrt{a-4}-2(a-4)=2a-2a+8=\mathbf{8}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{a-b}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)+\sqrt{a-b}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}+1}+\sqrt{a-b}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}}+\sqrt{a-b}=\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}=\mathbf{2\sqrt{a-b}}$$

4. Sottolinea, tra i seguenti, i radicali irriducibili:

$\mathbf{\sqrt[9]{36}}$ $\sqrt[6]{64}$ $\mathbf{\sqrt[7]{21}}$ $\sqrt[4]{196}$ $\sqrt[4]{625}$ $\sqrt[8]{400}$ $\sqrt[15]{32}$ $\mathbf{\sqrt[8]{150}}$

5. Semplifica i seguenti radicali, supponendo verificate le condizioni di esistenza e inserendo il valore assoluto nei risultati, se necessario.

$$\sqrt{81\,a^2}=\mathbf{9|a|} \qquad \sqrt{t^4\,(t+1)^6}=\mathbf{t^2\,|t+1|^3}$$

$$\sqrt{a^4+10a^2+25}=\sqrt{(a^2+5)^2}=\mathbf{a^2+5} \qquad \sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{2}{a^3}+\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\frac{1+2a+a^2}{a^4}}=\mathbf{\frac{|a+1|}{a^2}}$$

6. Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni e semplifica il risultato:

$$\sqrt[6]{\frac{32}{9}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{8}}=-\sqrt[12]{\left(\frac{2^5}{3^2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)^3}=-\sqrt[12]{\frac{2^{10}}{3^4}\cdot\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{2^9}}=-\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\mathbf{-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt[3]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{1-\frac{2}{5}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{5}}=\sqrt[6]{\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{2^3}}=\sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\mathbf{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}:\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{1}{2}}=-\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\mathbf{-\sqrt[6]{2}}$$

$$\sqrt[4]{2-\frac{2}{3}}:\sqrt[6]{1-\frac{5}{9}}=\sqrt[4]{\frac{4}{3}}:\sqrt[6]{\frac{4}{9}}=\sqrt[12]{\left(\frac{2^2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^2}=\sqrt[12]{\frac{2^6}{3^3}\cdot\frac{3^4}{2^4}}=\sqrt[12]{2^2\cdot 3}=\mathbf{\sqrt[12]{12}}$$

7. Trasporta i fattori esterni sotto il segno di radice:

$$\left(2-\frac{3}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}} \qquad \left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}+1}=-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\mathbf{-\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

8. Trasporta fuori dal segno di radice:

$$\sqrt[5]{8^3-8^2}=\sqrt[5]{8^2\,(8-1)}=\sqrt[5]{2^6\cdot 7}=\mathbf{2\sqrt[5]{14}} \qquad \sqrt[3]{6^3-3^3}=\sqrt[3]{3^3(2^3-1)}=\mathbf{3\sqrt[3]{7}}$$

9. Razionalizza il denominatore delle seguenti frazioni:

$$\frac{24}{\sqrt[4]{108}} = \frac{24}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}} = \frac{24\sqrt[4]{12}}{6} = \mathbf{4\sqrt[4]{12}} \qquad \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \cdot \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{6\sqrt{2}+3+4+\sqrt{2}}{8-1} = \frac{7\left(\sqrt{2}+1\right)}{7} = \mathbf{\sqrt{2}+1}$$

10. Semplifica le seguenti frazioni dopo aver scomposto in fattori i loro termini:

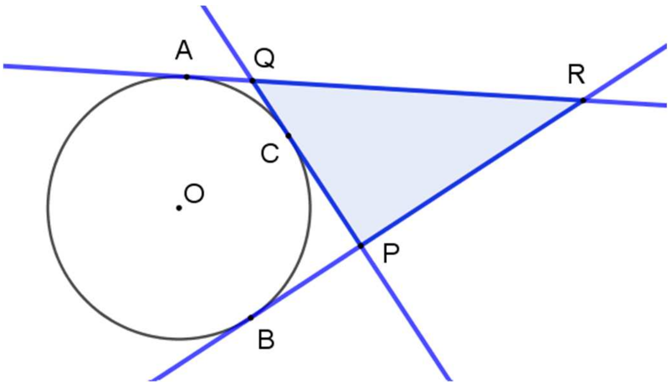
$$\frac{x^2-3}{x^2-2x\sqrt{3}+3} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\left(x-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\boldsymbol{x+\sqrt{3}}}{\boldsymbol{x-\sqrt{3}}} \qquad \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+3+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\sqrt{3}}}$$

11. Verifica che il prodotto tra la somma delle radici di due numeri consecutivi e la loro differenza è sempre uguale a $+1$ o a -1.

Sia x il primo numero e $x+1$ il suo consecutivo, ottengo:

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = x+1-x = 1 \qquad \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right) = x-(x+1) = -1$$

12. In riferimento alla figura, in cui le tre rette in blu sono tangenti alla circonferenza rispettivamente in A, B e C, è noto che $\overline{PC} = 2\,\overline{QC}$, il perimetro del triangolo PQR è 24 cm e $\overline{PQ} + 2\,\overline{QR} + 3\,\overline{PR} = 50\ cm$. Determina le lunghezze dei lati del triangolo PQR.



Per il teorema delle tangenti, se da un punto esterno a una circonferenza (nello specifico: R, Q e P rispettivamente) si conducono le due rette tangenti a essa, allora i segmenti di tangente, aventi ciascuno un estremo nel punto suddetto e l'altro in un punto comune con la circonferenza, sono congruenti, ovvero:

$$RA \cong RB \qquad QA \cong QC \qquad PC \cong PB$$

Perciò, il perimetro del triangolo PQR diventa:

$$2p_{PQR} = \overline{RQ} + \overline{QP} + \overline{PR} = \overline{RQ} + \overline{QC} + \overline{CP} + \overline{PR} =$$
$$= \overline{RQ} + \overline{QA} + \overline{BP} + \overline{PR} = \overline{RA} + \overline{RB} = 2\,\overline{RA}$$

Da ciò possiamo dedurre la misura dei due segmenti di tangente:

$$2\,\overline{RA} = 24\ cm \quad \Rightarrow \quad \overline{RA} = \overline{RB} = 12\ cm$$

Pongo: $\overline{QC} = x$ e, dato che $\overline{PC} = 2\,\overline{QC}$, $\overline{PC} = 2x$.

Gli altri lati del triangolo diventano: $\overline{RQ} = \overline{RA} - \overline{QA} = \overline{RA} - \overline{QC} = 12 - x$, $\overline{PR} = \overline{RB} - \overline{PB} = \overline{RB} - \overline{PC} = 12 - 2x$

Dalla condizione data, ottengo l'equazione:

$$\overline{PQ} + 2\,\overline{QR} + 3\,\overline{PR} = 50\ cm \quad \Rightarrow \quad 2x + x + 2\,(12-x) + 3\,(12-2x) = 50$$

Risolvendola, potrò determinare la lunghezza dei lati del triangolo PQR:

$$2x + x + 24 - 2x + 36 - 6x = 50 \qquad -5x = -10 \qquad x = 2$$

Perciò:

$$\overline{RQ} = 12 - x = (12-2)\ cm = \mathbf{10\ cm} \qquad \overline{PR} = 12 - 2x = (12-4)\ cm = \mathbf{8\ cm}$$
$$\overline{PQ} = \overline{QC} + \overline{CP} = x + 2x = 3x = \mathbf{6\ cm}$$