Semplifica le seguenti espressioni:

1. $(a-3)^3 + 6a\,(a+3)(a-3) + (a+3)^3$

   $= a^3 - 9a^2 + 27a - 27 + 6a\,(a^2-9) + a^3 + 9a^2 + 27\,a + 27 =$

   $= a^3 - 9a^2 + 27a - 27 + 6a^3 - 54\,a + a^3 + 9a^2 + 27\,a + 27 = \mathbf{8a^3}$

2. $[a\,(a^2+1) - a^2\,(a-1)]^2 - a^2\,(a+1)^2$

   $= (a^3 + a - a^3 + a^2)^2 - a^2\,(a^2 + 2a + 1) =$

   $= a^4 + a^2 + 2a^3 - a^4 - 2a^3 - a^2 = \mathbf{0}$

3. $(b-2a)^2(b+2a)^2 - (b^2 - ab - a^2)(b^2 - ab + a^2) + (-3ab)^2 - 17\,a^4$

   $= (b^2 - 4a^2)^2 - [(b^2 - ab)^2 - a^4] + 9a^2b^2 - 17a^4 =$

   $= b^4 + 16\,a^4 - 8\,a^2b^2 - (b^4 + a^2b^2 - 2\,ab^3) + b^4 + 9\,a^2b^2 - 17\,a^4 =$

   $= b^4 + a^2b^2 - b^4 - a^2b^2 + 2\,ab^3 = \mathbf{2\,ab^3}$

4. $[x^2 + 2\,(1-x)]^2 - 4x^2(1-x) - [2\,(1-x)]^2 - (x^2-1)^2$

   $= x^4 + 4\,(1-x)^2 + 4x^2(1-x) - 4x^2(1-x) - 4\,(1-x)^2 - (x^4 - 2x^2 + 1)^2 =$

   $= x^4 - x^4 + 2x^2 - 1 = \mathbf{2x^2 - 1}$

Esegui le seguenti divisioni (con la regola di Ruffini, quando possibile) e verifica se sono giuste facendo la prova:

5. $(x^6 + 1) : (x^4 - x^2 + 1)$

$$
\begin{array}{cccc|l}
x^6 & & & 1 & x^4 - x^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-x^6 & x^4 & -x^2 & & x^2 + 1 \\ \cline{1-4}
 & x^4 & -x^2 & 1 & \\
 & -x^4 & x^2 & -1 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$Q(x) = x^2 + 1 \qquad R(x) = 0$$

Per fare la prova, dobbiamo verificare che: $Q(x)\,d(x) + R(x) = D(x)$, dove $d(x)$ è il divisore e $D(x)$ il dividendo e infatti:

$$(x^2+1)(x^4 - x^2 + 1) + 0 = x^6 - x^4 + x^2 + x^4 - x^2 + 1 = x^6 + 1$$

6. $(2x^3 + x^2 + 1) : (2x - 1)$

   Possiamo applicare la regola di Ruffini, dividendo i coefficienti dei due termini per 2: $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline
 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

$$Q(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} \qquad R(x) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Per fare la prova, dobbiamo verificare che: $Q(x)\,d(x) + R(x) = D(x)$, dove $d(x)$ è il divisore e $D(x)$ il dividendo e infatti:

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)(2x - 1) + \frac{3}{2} = 2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2x^3 + x^2 + 1$$

7. $(3a^3 + b^3 - ab^2 + 2a^2b) : (b + a)$ Svolgi la divisione rispetto alla lettera b

Possiamo applicare la regola di Ruffini:

	1	$-a$	$2a^2$	$3a^3$
$-a$		$-a$	$2a^2$	$-4a^3$
	1	$-2a$	$4a^2$	$-a^3$

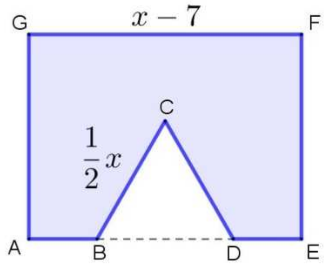
$Q(a) = b^2 - 2ab + 4a^2$ $\qquad$ $R(a) = -a^3$

Per fare la prova, dobbiamo verificare che: $Q(a)\, d(a) + R(a) = D(a)$, dove $d(a)$ è il divisore e $D(a)$ il dividendo e infatti:

$$(b^2 - 2ab + 4a^2)(b + a) - a^3 = b^3 + ab^2 - 2ab^2 - 2a^2b + 4a^2b + 4a^3 - a^3 = b^3 - ab^2 + 2a^2b + 3a^3$$

8. L'area del rettangolo AEFG è $x^2 - 10\,x + 21$. Determina il perimetro di ABCDEFG, sapendo che il triangolo BCD è equilatero.

Dato che l'area del rettangolo AEFG è $x^2 - 10\,x + 21$ e la sua base è $x - 7$, posso determinarne l'altezza GA eseguendo la divisione:



	1	-10	21
7		7	-21
	1	-3	0

L'altezza del rettangolo misura $x - 3$. Ora dobbiamo determinare $\overline{AB} + \overline{DE}$:

$$\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{BD} = x - 7 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - 7$$

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GA} =$$

$$= \frac{1}{2}x - 7 + \frac{1}{2}x \cdot 2 + (x - 3) \cdot 2 + x - 7 = \frac{1}{2}x - 7 + x + 2x - 6 + x - 7 = \boldsymbol{\frac{9}{2}x - 20}$$

9. L'area di un rettangolo R è $a^2 + 5ab + 6b^2$ e la base misura $a + 2b$, con $a, b > 0$. Trova l'area di un secondo rettangolo che ha altezza doppia rispetto a quella di R e base uguale a quella di R aumentata di $2b$.

Determino l'altezza del rettangolo R, eseguendo la divisione tra l'area e la base:

	1	$5b$	$6b^2$
$-2b$		$-2b$	$-6b^2$
	1	$3b$	0

L'altezza del rettangolo R è $a + 3b$.
L'altezza del nuovo rettangolo è $2(a + 3b) = 2a + 6b$, mentre la sua base è $a + 2b + 2b = a + 4b$. Possiamo determinare la nuova area:

$$Area = (a + 4b)(2a + 6b) = 2a^2 + 6\,ab + 8\,ab + 24\,b^2 = \boldsymbol{2a^2 + 14\,ab + 24\,b^2}$$