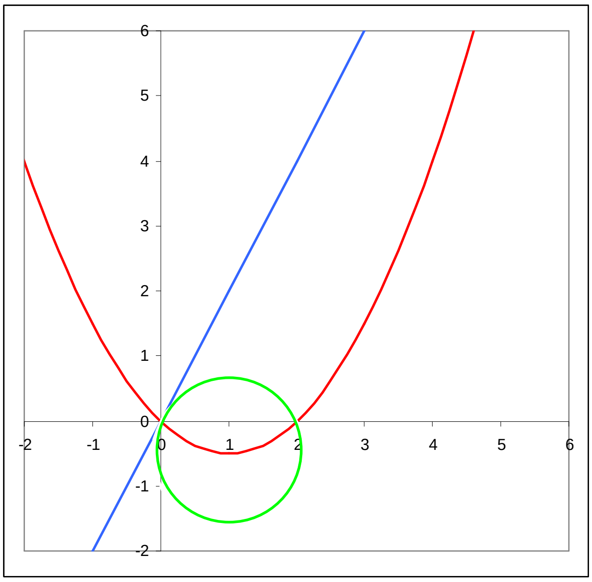
9. p. 447 N° 43: *Scritta l'equazione della circonferenza tangente in O alla retta* $t: 2x - y = 0$ *e passante per A (2; 0), determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, con vertice nel centro C della circonferenza e passante per l'origine O.*

Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas



Determino l'asse del segmento OA: $x = 1$.

Determino la retta perpendicolare a *t* e passante per O: $y = -\frac{1}{2}x$.

Dalla loro intersezione ricavo le coordinate di $C\left(1; -\frac{1}{2}\right)$. Il raggio è dato dal segmento CO: $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. L'equazione della circonferenza è, a questo punto:

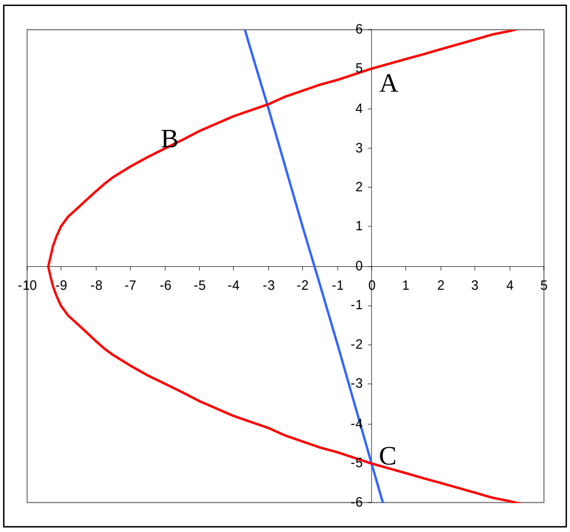
$$x^2 + y^2 - 2x + y = 0$$

Determino l'equazione della parabola, sapendo che $c = 0$ perché passa per l'origine; $-\frac{b}{2a} = 1$, cioè: $b = -2a$. E l'ordinata del vertice diventa, invece: $a = \frac{1}{2}$, da cui ricavo anche $b = -1$, perciò:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

10. *Dati i punti A (0; 5) e B (-6; 3), detto C il punto d'intersezione dell'asse del segmento AB con l'asse y, determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x e passante per A, B e C.*

Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas



Determino l'asse del segmento AB di equazione $y = -3x - 5$. Intersecandolo con l'asse *y*, trovo le coordinate di $C\,(0; -5)$.
Dato che i punti A e C sono simmetrici rispetto all'origine, il vertice della parabola si trova sull'asse *x*, perciò l'equazione generica della parabola è: $x = ay^2 + c$. Sostituisco le coordinate di A e di B nella generica equazione e metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = 25a + c \\ -6 = 9a + c \end{cases}$$ da cui ottengo: $x = \frac{3}{8}y^2 - \frac{75}{8}$.

11. Determina se esistono punti di intersezione fra la parabola di equazione $y=\frac{1}{2}x^2-x+4$ e la retta $4x-5y-20=0$.

Metto a sistema l'equazione della retta con quella della parabola:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x+4 \\ 4x-5y-20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x+4 \\ y=\frac{4}{5}x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{4}{5}x-4 \\ \frac{1}{2}x^2-x+4=\frac{4}{5}x-4 \end{cases}$$

$$5x^2-10x+40-8x+40=0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2-18x+80 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-400}}{5}$$

$\Delta < 0$, perciò *la retta è esterna alla parabola*

12. Dato il fascio di rette $y=4x+k$, determina il valore di k per cui la retta sia tangente alla parabola $y=3x^2-x-1$.

Metto a sistema l'equazione del fascio di rette con quella della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y=4x+k \\ y=3x^2-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-x-1=4x+k \\ y=4x+k \end{cases} \Rightarrow \quad 3x^2-5x-1-k=0$$

$$\Delta=25+12(1+k)=0 \quad \Rightarrow \quad 25+12+12k=0 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{37}{12}$$

13. Dal punto $P(-2;5)$ conduci le tangenti alla parabola $y=4x^2-3x-1$.

Considero la generica retta passante per il punto P, poi metto a sistema l'equazione del fascio di rette con quella della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y-5=m(x+2) \\ y=4x^2-3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5+m(x+2) \\ 5+m(x+2)=4x^2-3x-1 \end{cases} \Rightarrow \quad 4x^2-3x-6-mx-2m=0$$

$$4x^2-(3+m)x-6-2m=0$$

$$\Delta=(3+m)^2+16(6+2m)=0 \quad \Rightarrow \quad 9+6m+m^2+96+32m=0 \quad \Rightarrow$$

$$m^2+38m+105=0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{361-105}}{1}=-19\pm16=\left\langle \begin{array}{l} -3 \\ -35 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$y=-3x-1 \qquad y=-35x-65$$

14. Dal punto $P(1;1)$ conduci le tangenti alla parabola $y = 3x^2 - x - 1$.

Considero la generica retta passante per il punto P, poi metto a sistema l'equazione del fascio di rette con quella della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = 3x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + m(x-1) \\ 1 + m(x-1) = 3x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - x - 2 - mx + m = 0$$

$$3x^2 - (1+m)x - 2 + m = 0$$

$$\Delta = (1+m)^2 - 12(m-2) = 0 \Rightarrow 1 + 2m + m^2 - 12m + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow y = 5x - 4$$

15. Determina l'equazione di una parabola, con l'asse parallelo all'asse y, sapendo che passa per i punti A (–1; 1) e B (2; 1) ed è tangente alla retta *r* di equazione y = –x + 3.

Innanzi tutto impongo il passaggio della parabola per i due punti A e B, sostituendo le coordinate dei due punti nell'equazione generica della parabola $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} 1 = a - b + c \\ 1 = 4a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - a + b \\ 1 = 4a + 2b + 1 - a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - a + b \\ 0 = 3a + 3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 - a - a \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow y = ax^2 - ax + 1 - 2a$$

Considero la retta r e la metto a sistema con l'equazione generica della parabola. Infine pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = ax^2 - ax + 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ -x + 3 = ax^2 - ax + 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow ax^2 - ax - 2 - 2a + x = 0$$

$$ax^2 + (1-a)x - 2 - 2a = 0$$

$$\Delta = (1-a)^2 + 4a(2+2a) = 0 \Rightarrow 1 - 2a + a^2 + 8a + 8a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$9a^2 + 6a + 1 = 0 \Rightarrow (3a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$